УДК 681.3

***Э.И. Ватутин[1], С.Е. Кочемазов[2], О.С. Заикин[2], И.И. Цитерров[3]***
*e-mail: evatutin@rambler.ru*
*[1] Юго-Западный государственный университет, Курск*
*[2] Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск*
*[3] Интернет-портал BOINC.ru, Москва*

## ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ СРЕДИ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ ОБЩЕГО ВИДА

*Произведен подсчет числа диагональных латинских квадратов порядка $N \leq 8$, обладающих и не обладающих парными ортогональными квадратами. Найдены новые числовые последовательности. Произведена оценка вероятности нахождения ОДЛК.*

Одним из известных типов комбинаторных объектов являются диагональные латинские квадраты (ДЛК), представляющие собой квадратную таблицу размером $N \times N$ ячеек, заполненных значениями некоторого алфавита $|U| = N$ (для определенности, $U = \{0, 1, ..., N-1\}$) так, что в каждой строке, каждом столбце и на диагоналях значения не повторяются. ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию (любой ДЛК можно привести к указанному виду путем подстановки значений). Пара ДЛК $A$ и $B$ называются ортогональными (ОДЛК), если все упорядоченные пары значений $(a_{ij}, b_{ij}), i, j = \overline{1, N}$ в ее составе различны. С ОДЛК связан ряд открытых математических проблем, наиболее известной из которых является проблема существования тройки взаимно ортогональных ДЛК (ВОДЛК) порядка 10 [1].

Для комбинаторных объектов рассматриваемого класса существует ряд числовых характеристик (число трансверсалей, число квадратов заданного типа и пр.), которые изменяют свое значение с ростом размерности $N$, образуя целочисленные числовые последовательности. Некоторые из них допускают аналитическую оценку, для других известны лишь ограничения сверху и снизу, однако для большинства из них оценка возможна лишь с использованием метода полного перебора. В данной работе с использованием разработанного авторами высокоэффективных генератора ДЛК [2] и процедуры отыскания ОДЛК на базе метода Эйлера-Паркера [3] произведена оценка числа ДЛК без ОДЛК («пустышек», англ. bachelor) и числа ДЛК, для которых возможно построение хотя бы одного ОДЛК (см. табл., аналогичные оценки для латинских квадратов приведены в работе [4], для ДЛК до выполненных расчетов они были неизвестны).

Таблица

Оценка числа ДЛК с и без ОДЛК и вероятности нахождения ОДЛК

| $N$ | Число нормализованных ДЛК без ОДЛК ($X$) | Число нормализованных ДЛК с ОДЛК ($Y$) | Число нормализованных ДЛК (A274171) ($Z$) | Вероятность нахождения ОДЛК $(Y/Z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1,0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | – |
| 3 | 0 | 0 | 0 | – |
| 4 | 0 | 2 | 2 | 1,0 |
| 5 | 4 | 4 | 8 | 0,5 |
| 6 | 128 | 0 | 128 | 0 |
| 7 | 170 944 | 256 | 171 200 | $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | 7 446 955 776 | 632 064 | 7 447 587 840 | $\approx 8{,}5 \cdot 10^{-5}$ |

Для размерности $N = 8$ темп обработки составил $\approx 4200$ ДЛК/с, обработка в 1 поток на процессоре Core i7 4770 заняла 20,5 дней. Несложно заметить, что $X + Y = Z$, т.к. ДЛК либо обладает ОДЛК, либо нет. Оценка вероятности отыскания ОДЛК показывает, что данный тип объектов является достаточно редким. Так, для размерности $N = 10$ вероятности отыскания ОДЛК по результатам вычислений, выполненных в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, составляет $(2 \div 3{,}3) \cdot 10^{-8}$. Найденные числовые последовательности (второй и третий столбец таблицы) являются новыми и не представлены в энциклопедии OEIS. Путем их умножения $N!$ на можно получить аналогичные последовательности для ДЛК общего вида: «0, 0, 0, 0, 480, 92 160, 861 557 760, 300 261 256 888 320» и «1, 0, 0, 48, 480, 0, 1 290 240, 25 484 820 480».

*Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 16-07-00155-а, 17-07-00317-а, 18-07-00628-а) и советом по грантам Президента РФ (стипендия № СП-1829.2016.5).*

---

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Учет алгоритмических особенностей задачи при генерации диагональных латинских квадратов // Известия ЮЗГУ. 2016. № 2 (65). С. 46–59.
3. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Алгоритмическая оптимизация программной реализации процедуры получения множества трансверсалей для латинских квадратов // Визуальная аналитика 2017. Кемерово: Кузбассвузиздат, 2017. С. 44–49.
4. Wanless I.M., Webb B.S. The existence of latin squares without orthogonal mates // Des. Codes Cryptogr. Vol. 40. 2006. pp. 131–135.