УДК 681.3

О СВОЙСТВАХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ[1]

Ватутин Э.И.[1]*, Кочемазов С.Е.*[2]*, Заикин О.С.*[2]*, Манзюк М.О.*[3]*,*
Никитина Н.Н.[4]*, Титов В.С.*[1]
[1]Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия
[2]Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
[3]Интернет-портал BOINC.RU, Москва, Россия
[4]Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск, Россия

Аннотация: в работе приведено определение центральной симметрии в диагональных латинских квадратах (ДЛК), описаны определяющие ее математические соотношения между ячейками квадрата, ее свойства, а также определено число ДЛК, обладающих указанной симметрией, для размерностей N<10.

Ключевые слова: диагональные латинские квадраты, симметрии, ортогональные диагональные латинские квадраты, псевдотройки, характеристики ортогональности.

PROPERTIES OF CENTRAL SYMMETRY FOR DIAGONAL LATIN SQUARES

Vatutin E.I.[1]*, Kochemazov S.E.*[2]*, Zaikin O.S.*[2]*, Manzuk M.O.*[3]*,*
Nikitina N.N.[4]*, Titov V.S.*[1]
[1]Southwest State University, Kursk, Russia
[2]Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Russia
[3]Internet-portal BOINC.RU, Moscow, Russia
[4]Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Russia

Abstract: in this work we introduce the definition of the central symmetry for diagonal Latin squares, show the corresponding mathematical relations between cells of a Latin square, describe the properties of the new symmetry, and perform enumeration of the corresponding squares of order at most 9.

[1] Авторы статьи выражают благодарность citerra[Russia Team] с интернет-портала BOINC.ru за помощь в реализации некоторых алгоритмов и нахождении ряда комбинаторных структур с уникальными характеристиками.

Keywords: diagonal Latin squares, symmetries, orthogonal mates, pseudo triples, orthogonality characteristics.

Одним из известных типов комбинаторных объектов, находящим применение в ряде фундаментальных и прикладных областей науки, являются латинские квадраты [1]. Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i, j = \overline{1, N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = |U|$ (для определенности далее будем полагать, что $U = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$). По определению в каждой строке и в каждом столбце латинского квадрата каждый из элементов множества U встречается в точности один раз. Для диагональных латинских квадратов (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали. ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию. Несложно показать, что путем биективной подстановки (перестановки) элементов множества U любого корректного ДЛК можно добиться его нормализации, а указанное множество квадратов представляет собой класс эквивалентности из $N!$ ДЛК. Для ряда задач квадраты в рамках указанного класса эквивалентности не различаются, т.к. обладают одинаковыми свойствами (наличие/отсутствие парного ортогонального квадрата, число трансверсалей и пр.), что существенно экономит машинное время в соответствующих вычислительных экспериментах. Канонической формой ДЛК называется лексикографически минимальный ДЛК в рамках соответствующего класса изоморфизма, получаемого с использованием М-преобразований по Чебракову (для $N = 10$ указанный класс включает в себя не более 15360 ДЛК).

Парой ортогональных диагональных латинских квадратов (ОДЛК) называется такая пара ДЛК A и B, в которой все упорядоченные пары (a_{ij}, b_{ij}), $i, j = \overline{1, N}$ уникальны (также в литературе подобные пары называются греко-латинскими квадратами). Построение ОДЛК является вычислительно сложной комбинаторной задачей, наиболее эффективно решаемой с использованием трансверсалей в рамках подхода Эйлера-Паркера [2]. Еще одной вычислительно сложной задачей является задача построения систем из взаимно ортогональных ЛК и ДЛК (ВОЛК и ВОДЛК, англ. MOLS и MODLS соответственно). Для ДЛК порядка 10 открытой математической проблемой является проблема о существовании тройки попарно ортогональных ДЛК. В настоящее время указанная тройка не найдена, однако и не доказано, что она не существует. Наилучшее приближение к решению данной проблемы на данный момент найдено коллективом авторов [3]: им является псевдотройка из трех ДЛК *A*, *B* и *C*, в которой две пары ДЛК (*AB* и *BC*) ортогональны, а третья (*AC*) ортогональна в 74 ячейках (итоговая характеристика ортогональности данной псевдотройки равна 274). Образующий данную псевдотройку квадрат *B* является симметричным в одной плоскости (для определенности, горизонтальной) [4] и строчно-инверсным (5 его строк получаются путем записи элементов других 5 строк в обратном порядке). Коллективом авторов произведен ряд вычислительных экспериментов в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, в ходе которых произведено построение всех возможных канонических форм симметричных в одной плоскости ДЛК, включающих в своем составе строчно-инверсные ДЛК, что не позволило увеличить найденную ранее характеристику ортогональности. Для ДЛК меньших размерностей интересные комбинаторные структуры получаются также для дважды симметричных ДЛК (симметрия как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости), однако для размерности $N = 10$ подобные ДЛК не существуют. Для комбинаторных структур на базе несимметричных ДЛК характеристики ортогональности получаются существенно более низкими (например, для большинства найденных структур типа Линия-3 («двушка») [5] указанная характеристика равна 12), ввиду чего представляется перспективным подход к поиску новых симметрий в ДЛК с целью попытки увеличения приведенной выше характеристики ортогональности.

Рассмотренные выше плоскостные симметрии устанавливают взаимно-однозначное соответствие между значениями элементов, расположенных симметрично относительно вертикальной и/или горизонтальной прямых, проходящих через центр квадрата (соответствия $[i, j] \Leftrightarrow [i, N-j-1]$ и $[i, j] \Leftrightarrow [N-i-1, j]$). Из школьного курса геометрии известен еще один тип симметрии: симметрия относительно точки. Простейшей попыткой отыскания подобной симметрии в ДЛК является установка данного центра симметрии в центре квадрата, а соответствующее соответствие может быть математически описано как $[i, j] \Leftrightarrow [N-i-1, N-j-1]$, пример соответствующего ДЛК порядка 9 приведен на рис. 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
6	3	0	2	7	8	1	4	5
3	2	1	8	6	7	0	5	4
7	8	6	5	1	3	4	0	2
8	6	4	7	2	0	5	3	1
2	7	5	6	8	4	3	1	0
5	4	7	0	3	1	8	2	6
4	5	8	1	0	2	7	6	3
1	0	3	4	5	6	2	8	7

Рис. 1. Пример центрально-симметричного ДЛК порядка 9 (соответствия между элементами со значениями 0 и 7 выделены серым, часть из них отмечены стрелками)

С целью отыскания ДЛК с подобной симметрией был использован разработанный ранее полнопереборный генератор ДЛК [6–7] с последующей проверкой получаемых ДЛК на предмет наличия искомой центральной симметрии. С его помощью был организован соответствующий вычислительный эксперимент, который позволил определить число нормализованных центрально симметричных ДЛК порядка $1 \leq N \leq 8$: 1, 0, 0, 2, 8, 0, 2 816, 135 168 (магические квадраты, обладающие схожим типом центральной симметрии, в литературе называются ассоциативными). Для размерности $N = 9$ подсчет числа центрально симметричных ДЛК с использованием данного подхода потребует нескольких месяцев счета на грид [8], ввиду чего был реализован специализированный генератор ДЛК, обладающих свойством центральной симметрии. Его корректность была протестирована на приведенных выше значениях числа центрально симметричных ДЛК малых порядков, а затем с его использованием за 19 минут на процессоре Core i7 4770 в 1 поток было определено число нормализованных центрально симметричных ДЛК порядка 9, которое составило 327 254 016. Число центрально симметричных ДЛК общего вида (не обязательно нормализованных) может быть получено из приведенных выше значений путем их умножения на $N!$ и представляет собой следующую последовательность: 1, 0, 0, 48, 960, 0, 14 192 640, 5 449 973 760, 118 753 937 326 080. Найденные последовательности являются новыми, они были добавлены в Онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей (англ. OEIS) [9] под номерами A293777 и A293778. Их расширение на случаи больших размерностей ДЛК не представляется возможным без применения вычислительных средств с параллельной архитектурой. С использованием разработанного генератора в настоящее время была отмечена следующая эмпирическая особенность, частично проверенная для размерностей $N \leq 25$: по-видимому центрально симметричные ДЛК существуют только для размерностей $N \neq 4n+2$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ (разумеется, за исключением случая $N = 3$, для которого ДЛК не существуют в принципе), что, к сожалению, исключает возможность построения комбинаторных структур с высокими характеристиками ортогональности для интересующего нас случая $N = 10$ на базе свойства центральной симметрии.

Как и найденные до этого другие типы симметрии, данные центрально симметричные ДЛК, как правило, обладают большим числом ОДЛК. Так, например, для приведенного на рис. 1 ДЛК порядка 9 есть 47 ОДЛК, в то время как для большинства ДЛК без симметрий в лучшем случае существует всего один ОДЛК. Для случая $N = 9$ был организован вычислительный эксперимент, в рамках которого производилось построение ОДЛК для всех ДЛК, обладающих свойством центральной симметрии. В результате был найден ДЛК

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 7 & 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

которому ортогональны 516 ДЛК (рекорд для размерности $N = 9$, см. последовательность A287695 в OEIS [10]). Кроме того, найденный ДЛК обладает рядом интересных особенностей:

1. Первые 3 строки полностью совпадают с пандиагональными (получены путем циклическим вращения строки «0 1 2 3 4 5 6 7 8» на 3 и на 6.
2. Остальные строки (группы строк 2–5, 6–8) также похожи на пандиагональные: получаются циклическим вращением на 3 и на 6, но обладают другим порядком элементов.
3. Квадрат является самоортогональным для преобразований отражения от обеих диагоналей, вращений и отражений по вертикали и горизонтали.
4. Наибольшая характеристика ортогональности псевдотройки на его базе равна 81.

Библиографический список

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Wanless I.M. Transversals in Latin Squares: A Survey // arXiv:0903.5142 [math.CO], 2009. 35 p.
3. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
4. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Титов В.С. Исследование свойств симметричных диагональных латинских квадратов. Работа над ошибками // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2017). Тула, 2017. С. 30–36.
5. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Манзюк М.О. Анализ комбинаторных структур на множестве отношения ортогональности диагональных латинских квадратов порядка 10 // Информационные технологии и математическое моделирование систем 2017. М.: ЦИТП РАН, 2017. С. 167–170.
6. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Федоров С.С. Программа для рекуррентного перечисления диагональных латинских квадратов заданного порядка методом полного перебора и его модификациями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016662287 от 07.11.16.
7. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
8. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S. Using grid systems for enumerating combinatorial objects on example of diagonal Latin squares // CEUR Workshop proceedings. Selected Papers of the 7th International Conference Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education. 2017. Vol. 1787. pp. 486–490.
9. Sloanne N.J.A. Online Encyclopedia of Integer Sequences // http://oeis.org
10. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Титов В.С. Оценка комбинаторных характеристик для пар ортогональных диагональных латинских квадратов // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сиг-

налов (МППОС'2017). Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. С. 104–111.