Анализ комбинаторных структур на множестве отношения ортогональности диагональных латинских квадратов порядка 10

Ватутин Э.И., Титов В.С.
Юго-Западный государственный университет, РФ, г. Курск
Заикин О.С., Кочемазов С.Е.
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, РФ, г. Иркутск
Манзюк М.О.
Интернет-портал BOINC.ru, РФ, г. Москва

Одним из известных классов комбинаторных объектов являются латинские квадраты (ЛК) заданного порядка *N*, каждый из которых представляет собой квадратную таблицу $A = \left\| a_{ij} \right\|, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N}$, заполненную некоторыми символами алфавита мощности *N* (для определенности, цифрами от 0 до $N-1$) так, что в каждой строке и каждом столбце символы алфавита не повторяются. Для диагональных ЛК (ДЛК) накладывается дополнительное ограничение на уникальность элементов на главной и побочной диагоналях. Ортогональной парой ЛК или ДЛК (или греко-латинским квадратом) называется такая пара *A* и *B* ЛК или ДЛК соответственно, в составе которой все упорядоченные пары элементов $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$ различны [1]. ЛК, ДЛК и их ортогональные пары находят ряд практических применений, с ними связан ряд открытых математических проблем (например, проблема отыскания тройки попарно ортогональных ДЛК порядка 10 или доказательство того, что ее не существует [2]).

Поиск пар ортогональных ДЛК (ОДЛК) является сложной комбинаторной задачей, наиболее эффективно решаемой путем построения множества диагональных трансверсалей для одного из ДЛК с последующим отысканием в его составе *N* непересекающихся трансверсалей и достройкой второго ДЛК пары. По ряду оценок приблизительно на 32 млн. ДЛК порядка 10 без пары приходится одна пара ОДЛК. В настоящее время поиск и коллекционирование ОДЛК порядка 10 проводится рядом научных групп, коллекция известных решений по состоянию на май 2017 года включает более 65 000 различных канонических форм (главных классов) ОДЛК. Известной классификацией найденных решений является их деление по числу ДЛК, ортогональных заданному ДЛК. По этому признаку коллекция включает в своем составе более 62 000 «однушек» – исходному ДЛК ортогонален лишь один ДЛК (здесь и далее все ДЛК являются нормализованными, т.е. имеют упорядоченную по возрастанию первую строку), 2 770 «двушек» – исходному ДЛК ортогональны два различных ДЛК, единственную «трешку» – исходному ДЛК ортогональны три различных ДЛК, а также 218 «четверок», 6 «шестерок» и 4 «восьмерки».

Указанная классификация является неполной и может быть расширена. Отношение ортогональности является бинарным отношением на множестве ДЛК и обладает свойствами нетранзитивности, симметричности и нерефлексивности (антирефлексивности для $N > 1$). Если рассматривать ДЛК как вершины некоторого графа, а отношение ортогональности между ними – как ребра, то известные решения коллекции представляют собой различные компоненты связности с небольшим (до 9) числом вершин (рис. 1).

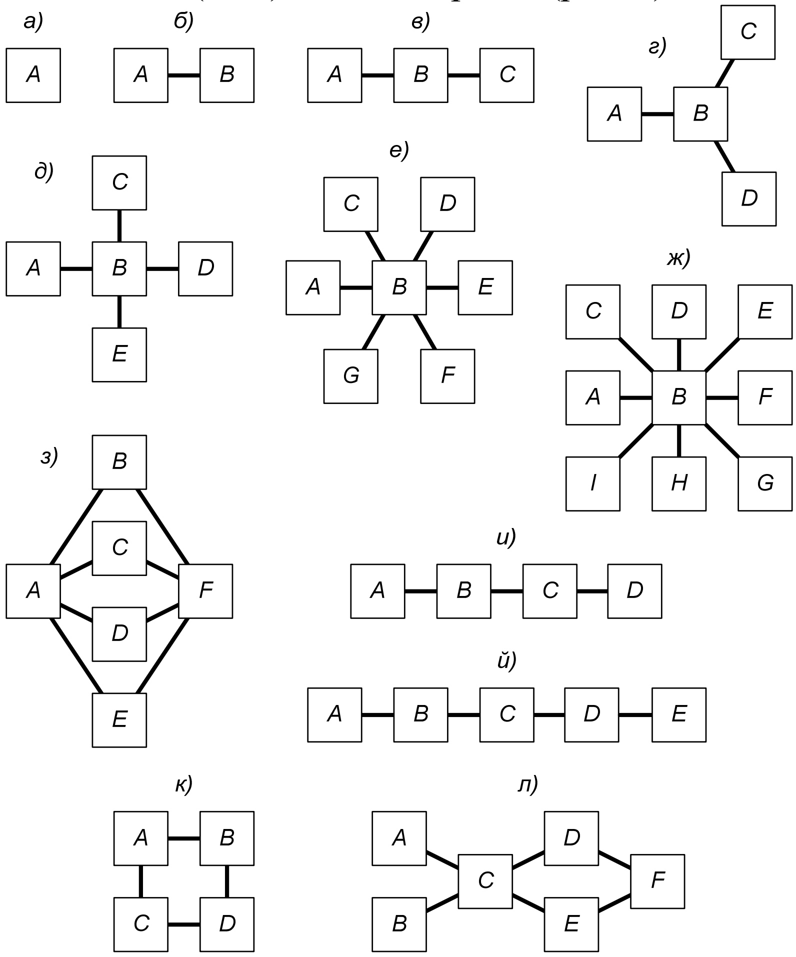

Рис. 1. Комбинаторные структуры на множестве отношения ортогональности диагональных латинских квадратов порядка 10: а – квадрат без пары («пустышка», англ. bachelor); б – «однушка» или линия-2; в – «двушка» или линия-3; г – «трешка»; д – «четверка»; е – «шестерка»; ж – «восьмерка»; з – ромб-4; и – линия-4; й – линия-5; к – цикл-4; л – «рыба»

Например квадрат *B* структуры линия-4 (рис. 1, и) по известной классификации является «двушкой», т.к. имеет пару ортогональных квадратов *A* и *C*, однако при более детальном рассмотрении он входит в состав более сложной комбинаторной структуры из четырех ДЛК. Примеры ДЛК, входящих в состав представленных на рис. 1 комбинаторных структур, приведены в табл. 1. Найденные комбинаторные структуры (рис. 1, з, и, й, к, л) являются новыми и не представлены в литературе. Ввиду их простоты они допускают тривиальную классификацию с использованием упорядоченного по возрастанию вектора степеней вершин (фактически степень вершины в данном случае – число ОДЛК для выбранного ДЛК) в качестве полного инварианта (в данной задаче) [3].

Таблица 1. Примеры ДЛК, входящих в состав различных комбинаторных структур (для каждой структуры ввиду ограничения на объем публикации приведен только один ДЛК, остальные могут быть тривиально достроены, элементы ДЛК приведены путем выписывания построчно)

Тип комбинаторной структуры	Значения элементов ДЛК
а	0123456789984672315013805426977265894031295107836460781359425437209816360298147585946172034719360528
б	0123456789120436597820156348973457981620574980216369812473058376019254963072854175681904324892573016
в	0123456789120436597820358146974697182035978654312034780912566941728503785063941253192708648562907341
г	0123456789123709854640963718259684513072596870243134592806178701635294237596410875128493606840127953
д	0123456789120436597823510984678596723041374918052640682713957480639152691254780396758142305837902614
е	0123456789123409567823408195679876543210876590432164912780533508721946501763289476591804324982367105
ж	0123456789123054967849682713056874905213735918046294876321503591728046874609352150123678942605814937
з	0123456789120436597823159048673469780152789154203656801793249742638510493782160585760932416058217493
и	0123456789123867094579640835124619702853380251946785973412062450867391908623517457419286306375194028
й	0123456789120436597823491805678765904321948263715058302796147698541032351709284640768132956951728403
к	0123456789329601784578306951249347208651268593041719785432064562781093840136957257198243606054172938
л	0123456789120436795887965240316945182370451073982620578136949371608542386927041554380912677682945103

Литература

1. *Colbourn C.J., Dinitz J.H.* Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. Chapman&Hall, 2006. 984 p.
2. *Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О.* Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. Т. 5. № 3. 2016. С. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304.
3. *Ватутин Э.И., Титов В.С.* Стратегии проверки корректности методов выявления изоморфизма графов с использованием грид-систем // Известия Юго-Западного государственного университета. 2014. № 1 (52). С. 26–30.