УДК 681.3

Оценка числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов малого порядка

Ватутин Э.И., канд. техн. наук

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

e-mail: evatutin@rambler.ru

Заикин О.С., канд. техн. наук

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

e-mail: zaikin.icc@gmail.com

Кочемазов С.Е.

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

e-mail: veinamond@gmail.com

Валяев С.Ю.

Интернет-портал BOINC.ru, г. Москва

e-mail: serval@boinc.ru

В.С. Титов, докт. техн. наук, проф.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет», г. Курск

e-mail: titov-swsu@rambler.ru

В статье рассмотрена возможность применения современных телекоммуникационных средств для решения задач комбинаторики с использованием концепции добровольных распределенных вычислений на платформе BOINC. Приведено подробное описание задачи построения трансверсалей и диагональных трансверсалей для диагональных латинских квадратов (ДЛК), показано, что с их использованием возможно эффективное построение ортогонального ДЛК для заданного исходного ДЛК. Аналитическая оценка минимального и максимального числа трансверсалей в зависимости от порядка квадрата N неизвестна, поэтому для определения искомых комбинаторных характеристик необходим вычислительный эксперимент. Минимальное и максимальное число трансверсалей для латинских квадратов малого порядка известно, в то время как аналогичные оценки для диагональных латинских квадратов и диагональных трансверсалей не известны. Авторами были разработаны программные реализации высокоэффективного генератора ДЛК и алгоритма построения числа трансверсалей путем перебора в глубину в возвратами, с использованием которых искомые характеристики были определены для $N < 8$. Для случая $N = 8$ с использованием проекта добровольных распределенных вычислений была организован соответствующий вычислительный эксперимент, который позволил определить искомые значения комбинаторных характеристик. Найденные целочисленные последовательности являются новыми и не представлены в энциклопедии OEIS.

Ключевые слова: диагональные латинские квадраты, трансверсали, комбинаторика, целочисленные последовательности, BOINC.

Введение

Современные средства телекоммуникаций и глобальная сеть Интернет в частности в последние десятилетия претерпевают взрывное развитие, что выражается как в росте скоростей каналов связи и объемов передаваемых данных, так и в росте числа узлов (в контексте данной статьи главным образом компьютеров), имеющих возможность обмена данными через Интернет. Наличие данной коммуникационной среды позволяет рассматривать разнородные географически удаленные вычислительные ресурсы (главным образом, процессоры и видеокарты компьютеров) как коллектив совместно работающих вычислителей, в совокупности обладающих вычислительными возможностями, приближающимися к показателям производительности суперкомпьютеров [1] в рамках известной концепции метакомпьютинга. С точки зрения классификации архитектур вычислительных систем подобная распределенная система представляет собой грид из персональных компьютеров, вычислительные ресурсы которой могут быть использованы для решения вычислительно сложных задач. С позиции параллельного программирования указанный класс задач должен допускать разбиение на большое количество (обычно сотни тысяч и более) подзадач, решаемых независимо друг от друга под управлением центрального узла (сервера проекта). Указанным свойством обладают, например, многие задачи комбинаторики, что позволяет их эффективное решение с использованием грид-систем.

Одной из крупнейших грид-систем из персональных компьютеров на данный момент является открытая инфраструктура для метакомпьютинга, разработанная в Калифорнийском университете в Беркли (англ. Berkeley Open Infrastructure for Network Computing, сокр. BOINC) [2]. На данный момент (июнь 2017 г.) она включает в своем составе более 4 миллионов пользователей, более 1 миллиона хостов, характеризуется реальной производительностью порядка 18 PFLOP/s по данным ресурса BOINCSTATS и объединяет более 50 активных научных проектов, в рамках которых в настоящее время производятся соответствующие вычисления. Она ориентирована на использование простаивающих вычислительных мощностей CPU и GPU машин добровольцев, отдающих свои вычислительные ресурсы на помощь науке.

В данной статье с использованием платформы BOINC в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home авторами была решена комбинаторная задача исследования асимптотического поведения числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов в зависимости от их порядка $N \le 8$. Данная группа комбинаторных характеристик не может быть вычислена аналитически, ввиду чего для определения искомых значений числовых последовательностей необходим вычислительный эксперимент.

Основные определения и постановка задачи

Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \left\| a_{ij} \right\|$, $i, j = \overline{1, N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = |U|$ (для определенности далее будем полагать, что $U = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$). По определению в каждой строке и в каждом столбце латинского квадрата каждый из элементов множества U встречается в точности один раз:

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \ne k : \left(a_{ij} \ne a_{ik}\right) \wedge \left(a_{ji} \ne a_{ki}\right). \quad (1)$$

Для диагональных латинских квадратов (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали ЛК:

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j : \left(a_{ii} \neq a_{jj} \right) \wedge \left(a_{i, N-i+1} \neq a_{j, N-j+1} \right). \quad (2)$$

ДЛК называется нормализованным, если элементы его первой строки упорядочены по возрастанию. Несложно показать, что путем биективной подстановки (перестановки) элементов множества U любого корректного ДЛК можно добиться его нормализации (указанное множество квадратов представляет собой класс эквивалентности из $N!$ ДЛК). Для ряда задач (подсчет числа ЛК и ДЛК [3–12], поиск пар и троек попарно (частично) ортогональных ЛК и ДЛК [13–16]) квадраты в рамках указанного класса эквивалентности не различаются, т.к. обладают одинаковыми свойствами (наличие/отсутствие парного ортогонального квадрата, число трансверсалей и пр.), что существенно экономит машинное время в соответствующих вычислительных экспериментах.

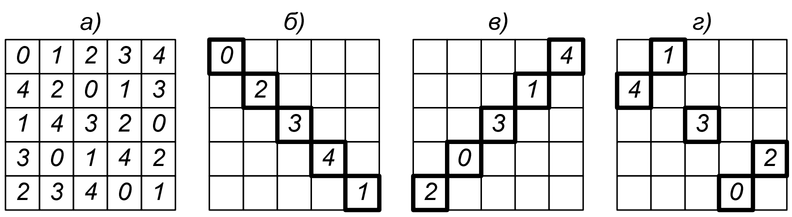
Трансверсалью T в ЛК называется такое множество элементов $T = \left\{ t_1, t_2, ..., t_N \right\} = \left\{ a_{i_1, j_1}, a_{i_2, j_2}, ..., a_{i_N, j_N} \right\}$, в котором все индексы различны

$$\forall k, l = \overline{1, N}, k \neq l : \left(i_k \neq i_l \right) \wedge \left(j_k \neq j_l \right) \quad (3)$$

и все значения элементов также различны

$$\forall k, l = \overline{1, N}, k \neq l : a_{i_k, j_k} \neq a_{i_l, j_l}. \quad (4)$$

Другими словами, трансверсаль включает в своем составе по одному элементу ЛК из каждой строки и из каждого столбца, причем значения всех элементов различны. Вектора $\left[i_1, i_2, ..., i_N \right]$, $\left[j_1, j_2, ..., j_N \right]$ и $\left[a_{i_1, j_1}, a_{i_2, j_2}, ..., a_{i_N, j_N} \right]$ образуют перестановки элементов множества U. в Пример ЛК и множества его трансверсалей приведен на рис. 1.



T_1={a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}} T_2={a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}} T_3={a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{45}, a_{54}}

Рис. 1. Пример ЛК (а) и множество его трансверсалей (б, в, г). Диагонали ДЛК являются трансверсалями, трансверсаль T_3 является диагональной

Диагональной трансверсалью $T^{(d)}$ в ЛК будем называть трансверсаль, которая включает в своем составе ровно по одному элементу с главной и побочной диагонали (в случае ЛК нечетного порядка данные элементы могут совпадать, как в примере на рис. 1, г):

$$\begin{gathered}\exists k,l=\overline{1,N},\forall m,n=\overline{1,N},m\neq k,n\neq l:\\ \left(i_k=j_k\right)\wedge\left(i_l+j_l=N+1\right)\wedge\left(i_m\neq j_m\right)\wedge\left(i_n+j_n\neq N+1\right).\end{gathered}\tag{5}$$

Диагональная трансверсаль является частным случаем трансверсали общего вида. Пример ЛК и множества его диагональных трансверсалей приведен на рис. 2.

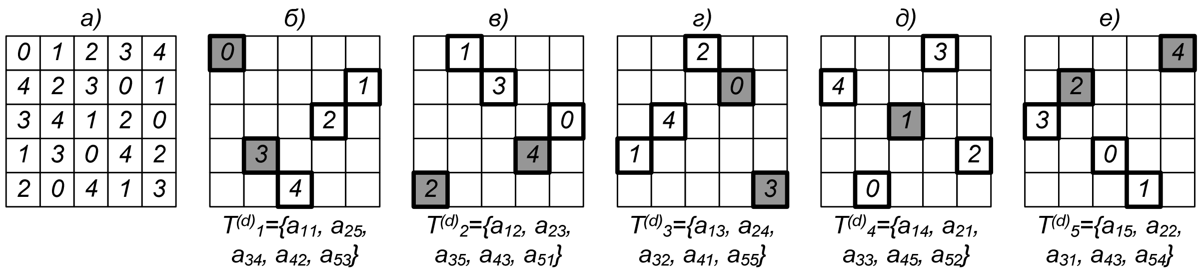


Рис. 2. Пример ЛК (а) и множество его диагональных трансверсалей (б, в, г, д, е). Элементы трансверсалей, лежащие на диагоналях, выделены серым

Трансверсали T_1 и T_2 (как диагональные, так и нет) называются ортогональными (или не пересекающимися) $T_1\perp T_2$, если в их составе не присутствуют одни и те же элементы ЛК:

$$T_1\perp T_2\Leftrightarrow\overline{\exists}k,l,m,n=\overline{1,N}:\left(a_{i_k,j_l}\in T_1\right)\wedge\left(a_{i_m,j_n}\in T_1\right)\wedge\left(a_{i_k,j_l}=a_{i_m,j_n}\right).$$

Или, другими словами:

$$T_1\perp T_2\Leftrightarrow T_1\cap T_2=\varnothing.$$

Так в примере на рис. 1 все трансверсали попарно пересекаются, т.к. в их состав входит элемент a_{33}; в то же время в примере на рис. 2 диагональные трансверсали попарно ортогональны.

Примерами вычислительно сложных комбинаторных задач на существование [15] являются задачи поиска пар и троек попарно ортогональных (греко-латинских) ЛК и ДЛК, обозначаемых как ОЛК и ОДЛК соответственно. При этом пара ЛК или ДЛК A и B называется ортогональной, если все упорядоченные пары $\left[a_{ij}, b_{ij}\right]$ в ее составе уникальны. Если для части пар указанное свойство не выполняется, то говорят о частичной ортогональности, причем соответствующая характеристика ортогональности представляет собой число не уникальных (повторяющихся) пар. Так, например, открытой проблемой является существование тройки попарно ортогональных ДЛК порядка 10. Наилучшим известным на данный момент решением является тройка квадратов A, B, C, в которой пары квадратов $A-B$ и $A-C$ ортогональны, а пара $B-C$ частично ортогональна, причем соответствующая характеристика ортогональности равна 74 [14].

Построение пар и троек ОДЛК теоретически возможно с использованием метода полного перебора в сочетании со стратегией ветвей и границ [16] или SAT-подхода [29], однако при помощи понятия трансверсалей можно добиться существенной экономии вычислительного времени (до нескольких порядков) при решении данной задачи. Известно, что необходимым условием существования квадрата B, ортогонального квадрату A, является наличие в последнем множества из N попарно ортогональных трансверсалей (для ЛК речь идет о трансверсалях, а для ДЛК – о диагональных трансверсалях). При соблюдении данного условия квадрат B получается тривиально: элементы, принадлежащие трансверсали T_i в квадрате A, получают значение $i-1$ в квадрате B (трансверсали нумеруются с единицы, значения элементов квадрата – с нуля). Так, например, для ДЛК, изображенного на рис. 2 и имеющего 5 не пересекающихся, может быть получен парный ортогональный квадрат (рис. 3).

а)

0	1	2	3	4
4	2	3	0	1
3	4	1	2	0
1	3	0	4	2
2	0	4	1	3

б)

$\boxed{0}$				
				$\boxed{0}$
			$\boxed{0}$	
	$\boxed{0}$			
		$\boxed{0}$		

в)

0	$\boxed{1}$			
		$\boxed{1}$		0
			0	$\boxed{1}$
	0		$\boxed{1}$	
$\boxed{1}$		0		

г)

0	1	$\boxed{2}$		
		1	$\boxed{2}$	0
	$\boxed{2}$		0	1
$\boxed{2}$	0		1	
1		0		$\boxed{2}$

д)

0	1	2	$\boxed{3}$	
$\boxed{3}$		1	2	0
	2	$\boxed{3}$	0	1
2	0		1	$\boxed{3}$
1	$\boxed{3}$	0		2

е)

0	1	2	3	$\boxed{4}$
3	$\boxed{4}$	1	2	0
$\boxed{4}$	2	3	0	1
2	0	$\boxed{4}$	1	3
1	3	0	$\boxed{4}$	2

ж)

00	11	22	33	44
43	24	31	02	10
34	42	13	20	01
12	30	04	41	23
21	03	40	14	32

Рис. 3. Пример формирования ортогонального квадрата (б, в, г, д, е) для исходного квадрата (а) с использованием множества из 5 попарно ортогональных трансверсалей и результирующий ОДЛК (ж)

При наличии ограничения (3) на уникальность пар индексов в пределах трансверсали верхняя оценка их числа определяется числом $N!$ перестановок элементов множества *U*, а сам процесс построения множества трансверсалей в достаточной степени схож с решением широко известной задачи о ладьях [17]. Наложение ограничения (4) (по определению) на уникальность значений элементов в пределах трансверсали существенно снижает их общее число, что позволяет эффективную практическую реализацию процесса их отыскания с последующим нахождением множества из *N* попарно ортогональных трансверсалей (разумеется при его существовании).

Мощность множества трансверсалей различается для различных квадратов. Аналитические зависимости минимального/максимального числа трансверсалей от порядка квадрата *N* неизвестны. Для ЛК и соответствующих им недиагональных трансверсалей зависимость их минимального/максимального количества от размерности задачи *N* известна и задается последовательностями A091323 (минимальное число трансверсалей в ЛК порядка $N < 10$) и A090741 (максимальное число трансверсалей в ЛК порядка $N < 10$) в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS) [17–20]. Открытой математической проблемой является подтверждение или опровержение гипотезы о том, что максимальное число трансверсалей для ЛК порядка 10 равно 5504 [21].

Вычислительный эксперимент

Соответствующие оценки числа трансверсалей и диагональных трансверсалей для ДЛК неизвестны и могут быть определены в ходе вычислительного эксперимента. Для этого необходимо осуществление генерации всех ДЛК заданного порядка N, построение множества трансверсалей для каждого из них и сохранение рекордных решений с минимальной и максимальной мощностью множества трансверсалей. Задача генерации ДЛК может быть решена с использованием высокоэффективного генератора ДЛК, разработанного авторами и базирующегося на алгоритмических особенностях решаемой задачи (использование порядка заполнения элементов ДЛК отталкиваясь от принципа минимума возможностей [24]; использование статических структур данных вместо размещения их в динамической памяти; учет мощности множеств возможных значений для еще не заполненных ячеек квадрата в совокупности с ранним отсечением неперспективных ветвей дерева комбинаторного перебора при нахождении элементов квадрата без возможных элементов; применение вспомогательных структур данных (одномерных массивов) для быстрого определения множеств допустимых элементов; использование битовых операций) [25–28]. Построение множества трансверсалей для заданного ДЛК реализуется с использованием следующего рекуррентного алгоритма.

1. (инициализация) Задать начальные значения для множества трансверсалей $S := \varnothing$, текущей глубины рекурсии $d := 0$, множества доступных столбцов $C := U$, множества доступных значений элементов $E := U$.

2. (условие завершения рекурсии) Если $d = N$, то добавить текущую трансверсаль T в множество найденных трансверсалей: $S := S \bigcup \{T\}$; уменьшить текущий уровень рекурсии: $d := d - 1$; осуществить рекуррентный возврат путем перехода к п. 3.3.
3. Для всех значений $i = \overline{1, N}$, таких что $(i \in C) \wedge (a_{di} \in E)$:

   3.1. Добавить элемент a_{di} в трансверсаль: $T[d] := i$; пометить i-й столбец как использованный: $C := C \setminus \{i\}$; пометить элемент a_{di} как использованный: $E := E \setminus \{a_{di}\}$.

   3.2. (рекуррентный спуск) Увеличить текущий уровень глубины рекурсии: $d := d + 1$; осуществить рекуррентный спуск путем перехода к п. 2.

   3.3. Пометить i-й столбец как свободный: $C := C \bigcup \{i\}$; пометить элемент a_{di} как свободный: $E := E \bigcup \{a_{di}\}$.
4. Конец алгоритма.

В приведенном описании алгоритма производится нахождение множества трансверсалей заданного ЛК *A*. Если требуется построить множество диагональных трансверсалей, то в п. 2 алгоритма необходимо добавление соответствующих проверок (5). Следуя стратегии ветвей и границ, в п. 3 может быть добавлено дополнительное условие (5), следуя которому производится проверка того, присутствует ли в текущей трансверсали в позициях с 1-ой по d-ю элемент ЛК с главной и элемент ЛК с побочной диагонали.

На рис. 4 приведен пример, поясняющий работу алгоритма.

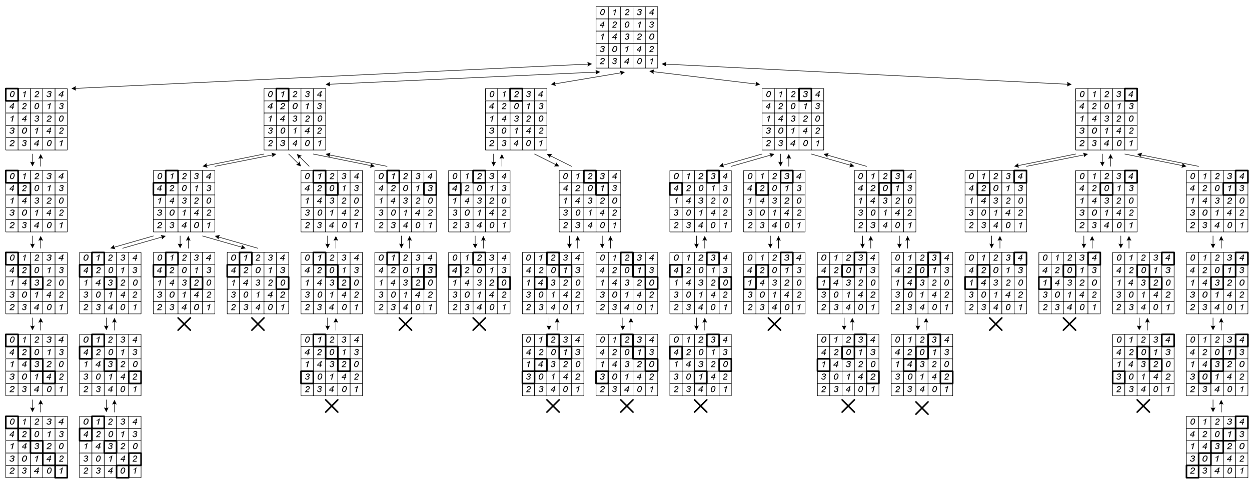


Рис. 4. Пример, поясняющий работу алгоритма поиска трансверсалей

Для приведенного алгоритма формирования множества трансверсалей была разработана соответствующая программная реализация, с использованием которой был организован вычислительный эксперимент по определению искомых значений числа трансверсалей для ДЛК порядка $1 \leq N \leq 7$, результаты которого приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Минимальное и максимальное число трансверсалей для ДЛК

N	Минимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Максимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Время вычислительного эксперимента и темп проверки
1	1 (0)	1 (0)	< 1 с
2	–	–	< 1 с
3	–	–	< 1 с
4	8	8	< 1 с

	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
5	3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	15 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	< 1 с
6	32 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	32 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	< 1 с
7	7 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	133 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	4 мин 15 с, ~600 ДЛК/с

Таблица 2. Минимальное и максимальное число диагональных трансверсалей для ДЛК

N	Минимальное число диагональных	Максимальное число диагональных	Время вычислительного

	трансверсалей и соответствующий ДЛК	трансверсалей и соответствующий ДЛК	эксперимента и темп проверки
1	1 $\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$	1 $\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$	< 1 с
2	–	–	< 1 с
3	–	–	< 1 с
4	4 $\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\\1&0&3&2\\2&3&0&1\end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix}0&1&2&3\\3&2&1&0\\1&0&3&2\\2&3&0&1\end{pmatrix}$	< 1 с
5	1 $\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\4&2&0&1&3\\1&4&3&2&0\\3&0&1&4&2\\2&3&4&0&1\end{pmatrix}$	5 $\begin{pmatrix}0&1&2&3&4\\4&2&3&0&1\\3&4&1&2&0\\1&3&0&4&2\\2&0&4&1&3\end{pmatrix}$	< 1 с
6	2 $\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5\\4&2&5&0&3&1\\3&5&1&2&0&4\\5&3&0&4&1&2\\2&4&3&1&5&0\\1&0&4&5&2&3\end{pmatrix}$	6 $\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3&0\\3&5&1&2&0&4\\5&3&0&4&1&2\\2&4&3&0&5&1\\1&0&4&5&2&3\end{pmatrix}$	< 1 с
7	0	27	4 мин 15 с, ~600 ДЛК/с

	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	

Оценка числа трансверсалей для размерности ДЛК $N = 8$ производится с темпом 350 ДЛК/с (все оценки даны для однопоточной реализации на Delphi для процессора Core i7 4770, ядро Haswell, принимающего участие в составе ряда проектов добровольных распределенных вычислений на платформе BOINC). С учетом того, что число ДЛК указанного порядка составляет $7\,447\,587\,840$ [9–11], соответствующий эксперимент потребует ~246 дней (~1 месяц при организации расчета на всех 8 ядрах) и может быть организован с использованием вычислительных средств с параллельной архитектурой.

Оценка числа трансверсалей для размерности ДЛК $N = 9$ (темп – 370 ДЛК/с, число ДЛК – $\approx 1{,}6 \cdot 10^{8}$ [9, 30]) потребует ~4,6 млн. лет при однопоточной программной реализации или около 900 лет при организации расчета на параллельной вычислительной системе с реальной производительностью порядка 5 TFLOP/s.

Для определения предельных значений числа трансверсалей в диагональных латинских квадратах порядка 8 с использованием проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home на платформе BOINC был организован соответствующий вычислительный эксперимент. В рамках одного расчетного задания (англ. Work Unit, сокр. WU) производилось получение всех нормализованных ДЛК с фиксированными 5 элементами второй строки, передаваемыми в качестве исходных данных (общее количество подобных расчетных заданий – 3 003, время вычисления одного задания – не более 1 часа). При организации вычислений на клиенте производилась достройка всех возможных ДЛК, соответствующих выбранному начальному заполнению, и определение для них искомых характеристик. В результате эксперимента были найдены следующие ДЛК с экстремальным числом трансверсалей.

Таблица 3. Минимальное и максимальное число трансверсалей для ДЛК порядка 8

Минимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Максимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Время вычислительного эксперимента и темп проверки
8 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 4 & 0 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	384 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 6 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	3 дня в рамках проекта Gerasim@Home

Таблица 4. Минимальное и максимальное число диагональных трансверсалей для ДЛК порядка 8

Минимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Максимальное число трансверсалей и соответствующий ДЛК	Время вычислительного эксперимента и

		темп проверки
0 $$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 1&2&0&4&3&7&5&6\\ 7&0&1&6&5&4&2&3\\ 4&6&7&5&1&0&3&2\\ 3&7&5&0&6&2&4&1\\ 5&4&6&7&2&3&1&0\\ 6&3&4&2&0&1&7&5\\ 2&5&3&1&7&6&0&4 \end{pmatrix}$$	120 $$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 2&3&0&1&6&7&4&5\\ 1&5&4&0&7&3&2&6\\ 5&4&7&6&1&0&3&2\\ 3&7&6&2&5&1&0&4\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 4&0&1&5&2&6&7&3\\ 6&2&3&7&0&4&5&1 \end{pmatrix}$$	3 дня в рамках проекта Gerasim@Home

Указанные вычисления были продублированы на вычислительном кластере Академик В.М. Матросов с использованием независимой программной реализации и подтвердили правильность приведенных выше значений.

Выводы

Несложно заметить, что для $1 \leq N \leq 8$ максимальное число трансверсалей в ДЛК совпадает с аналогичными оценками для ЛК (последовательность A090741 в OEIS), за исключением размерностей 2 и 3, для которых ДЛК не существуют. Возможно указанная особенность также будет иметь место и для ДЛК большего размера. Минимальное число трансверсалей представляет собой новую последовательность 1, 0, 0, 8, 3, 32, 7, 8, не представленную в OEIS.

Полученные последовательности минимального (1, 0, 0, 4, 1, 2, 0, 0) и максимального (1, 0, 0, 4, 5, 6, 27, 120) числа диагональных трансверсалей также обладают новизной и не представлены в OEIS.

Авторы статьи выражают благодарность всем добровольцам, принимающим участие в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев А.Л., Манзюк М.М., Ватутин Э.И.** Весь мир как суперкомпьютер // Троицкий вариант наука. № 16 (110) от 14 августа 2012. С. 7.
2. **Anderson D.P., Fedak G.** The computational and storage potential of volunteer computing // Sixth IEEE International Symposium on Cluster Computing and the Grid (CCGrid 2006). Singapore, 2006. pp. 73–80.
3. **Wells M.B.** The number of Latin squares of order 8 // J. Combin. Theory. 1967. № 3. pp. 98–99.
4. **Brown J.W.** Enumeration of Latin squares with application to order 8 // J. Combin. Theory. 1968. № 5. pp. 177–184.
5. **Bammel S.E., Rothstein J.** The number of 9x9 Latin squares // Discrete Math. 1975. № 11. pp. 93–95.
6. **McKay B.D., Rogoyski E.** Latin squares of order ten // Electron. J. Combinatorics. 1995. № 2.
7. **McKay B.D., Wanless I.M.** On the number of Latin squares // Ann. Combinat. 2005. № 9. pp. 335–344.
8. https://oeis.org/A002860
9. **Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S.** Using grid systems for enumerating combinatorial objects on example of diagonal Latin squares // Distributed computing and grid-technologies in science and education (GRID'16): book of abstracts of the 7th international conference. Dubna: JINR, 2016. p. 114–115.
10. **Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Журавлев А.Д., Манзюк М.О.** Использование грид-систем для подсчета комбинаторных объектов на примере диагональных латинских квадратов порядка 9 // Информационные технологии и математическое моделирование систем 2016. М.: изд-во Центра информационных технологий в проектировании РАН, 2016. С. 154–157.
11. https://oeis.org/A274171
12. https://oeis.org/A274806

13. **Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О.** Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016). Челябинск: издательский центр ЮУрГУ, 2016. С. 155–166.
14. **Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О.** Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. Т. 5. № 3. 2016. С. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304.
15. **Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O.** Applying high-performance computing to searching for triples of partially orthogonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies "Parallel Computing Technologies" (PCT 2016). Vol. 1576. 2016. P. 155–166. urn:nbn:de:0074-1576-1.
16. **Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E.** On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
17. **Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г.** Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с.
18. **Land A.H., Doig A.G.** An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems // Econometrica. 1960. Vol. 28. pp. 497–520. DOI: 10.2307/1910129.
19. https://oeis.org/A091323
20. https://oeis.org/A090741
21. **Wanless I.M.** A Generalization of Transversals for Latin Squares // Electronic Journal of Combinatorics. 2002. Vol. 9. № 1.

22. **McKay B.D., McLeod J.C., Wanless I.M.** The number of transversals in a Latin square // Des. Codes Cryptogr. 2006. № 40. pp. 269–284.
23. **Brown J., Cherry F., Most L., Parker E., Wallis W.** Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. № 139. pp. 43–49.
24. **Golomb S.W., Baumart L.D.** Backtrack programming // Journal of the ACM. 1965. Vol. 12. Iss. 4. pp. 516–524. DOI: 10.1145/321296.321300.
25. **Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С.** Особенности использования взвешивающих эвристик в задаче поиска диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2015. № 3 (16). С. 18–30.
26. **Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С.** О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
27. **Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С.** Учет алгоритмических особенностей задачи при генерации диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. 2016. № 2 (65). С. 46–59.
28. **Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., и др.** Программа для рекуррентного перечисления диагональных латинских квадратов заданного порядка методом полного перебора и его модификациями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016662287 от 07.11.16.
29. **Zaikin O., Kochemazov S., Semenov A.** SAT-based search for systems of diagonal Latin squares in volunteer computing project SAT@home // 39th International Convention on Information and Communication Technology,

Electronics and Microelectronics, MIPRO 2016, Opatija, Croatia, 2016. pp. 277–281. DOI: 10.1109/MIPRO.2016.7522152.

30. **Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S.** Using grid systems for enumerating combinatorial objects on example of diagonal Latin squares // CEUR Workshop proceedings. Selected Papers of the 7th International Conference Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education. 2017. Vol. 1787. pp. 486–490.