

# Использование грид-систем для подсчета комбинаторных объектов на примере диагональных латинских квадратов порядка 9

**Э.И. Ватугин**

Юго-Западный государственный университет  
РФ, г. Курск

**В.С. Титов**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Центр информационных технологий в проектировании Российской академии наук  
РФ, г. Одинцово,  
Юго-Западный государственный университет, г. Курск

**О.С. Заикин, С.Е. Кочемазов**

Институт динамики систем и теории управления СО РАН  
РФ, г. Иркутск

**С.Ю. Валяев, А.Д. Журавлев, М.О. Манзюк**

Интернет-портал VOINC.ru

Одним из классов задач в области комбинаторики являются задачи на пересчет [1]. При их решении как правило требуется определить число объектов с заданными свойствами. Простейшими примерами подобных задач являются известные задачи о ладьях, о ферзях и др. Для некоторых из них известны точные (аналитические) решения, для других требуется организация полного перебора с подсчетом числа решений, удовлетворяющих условиям задачи. Так, например, для упомянутой задачи о ладьях число возможных расположений  $N$  ладей на доске размером  $N \times N$  клеток совпадает с числом перестановок и составляет  $N!$ , для ряда задач число решений выражается через числа Стирлинга, числа Белла [2], число сочетаний или повторений и т.п.; в то же время точная аналитическая зависимость решений задачи о ферзях или числа латинских квадратов порядка  $N$  неизвестна (в последней задаче для него известны лишь ограничения сверху и снизу). Число решений как правило стремительно растет с ростом размерности задачи  $N$ , поэтому при перечислении объектов с использованием метода полного перебора требуется высокоэффективная программная реализация, учитывающая особенности решаемой задачи и обладающая высоким темпом генерации перечисляемых объектов. Рассматриваемый класс задач на пересчет с точки зрения параллельного программирования представляет собой слабо связанные задачи, что допускает их эффективную параллельную программную реализацию на широком спектре вычислительных средств с параллельной архитектурой, включающем грид-системы.

Одним из подобных типов комбинаторных объектов являются латинские квадраты (ЛК) [3], представляющие собой квадратные таблицы размером  $N \times N$ , каждая ячейка которых заполнена одним из  $N$  элементов алфавита (обычно цифрой от 0 до  $N-1$  или буквой), причем в каждой строке и каждом столбце

элементы не повторяются. Диагональные латинские квадраты (ДЛК) являются частным случаем латинских квадратов с дополнительным ограничением на уникальность элементов на диагоналях. Путем перестановки (подстановки) элементов алфавита любой ДЛК можно привести к виду, когда его первая строка упорядочена по возрастанию; соответствующие квадраты образуют класс изоморфизма мощностью  $N!$ . Зависимость числа ЛК от  $N$  известна и представлена последовательностью A000315 в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей [4] (англ. Online Encyclopedia of Integer Sequences, сокр. OEIS), зависимость числа ЛК с фиксированной первой строкой представлена последовательностью A000479; для ДЛК аналогичные зависимости известны лишь до размерности задачи  $N=8$  [5–8]. Число ДЛК 9 порядка может быть определено с использованием метода полного перебора.

Реализация указанной задачи «в лоб» оказывается достаточно неэффективной и характеризуется темпом генерации квадратов менее 1 ДЛК/с. С целью повышения данной величины (и, как следствие, снижения затрат вычислительного времени до разумных величин) для разработанной программной реализации была проведена программная оптимизация, включающая следующие оптимизации: использование диагонального порядка заполнения элементов ДЛК; использование статических структур данных вместо размещения их в динамической памяти; учет числа возможных значений  $|S_{ij}|$  для еще не заполненных ячеек квадрата в совокупности с ранним внеочередным заполнением ячеек с  $|S_{ij}|=1$  и ранним отсечением неперспективных ветвей дерева комбинаторного перебора с  $|S_{ij}|=0$ ; применение вспомогательных структур данных (одномерных массивов) для быстрого заполнения множеств допустимых элементов  $S_{ij}$ ; выбор порядка заполнения ячеек квадрата по критерию  $|S_{ij}|^{\otimes} \min$ , что уменьшает арность узлов дерева комбинаторного перебора; использование PGO-компиляции; использование битовых операций. В результате применения указанных оптимизаций удалось достичь темпа генерации 6,6 млн. ДЛК/с для однопоточной программной реализации (процессор Intel Core i7 4770) [5, 8].

Таким образом, разработанная программная реализация эффективнее исходной почти на 6 порядков, что позволяет ее использование при перечислении таких комбинаторных объектов, как ДЛК и связанных комбинаторных объектов в перспективе (например, пар ортогональных ДЛК (ОДЛК), известных также как греко-латинские квадраты, троек ОДЛК [10]). С ее использованием была произведена оценка числа ДЛК с фиксированной первой строкой [6] и общего количества ДЛК [7] в зависимости от  $N$ , что опубликовано в работах [4, 5].

Для определения числа ДЛК порядка 9 в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home [9] с июня по сентябрь 2016 г. был организован вычислительный эксперимент, в ходе которого был произведен подсчет искомого значения указанной комбинаторной характеристики (в проекте приняло участие около 500 добровольцев, привлечших около 1000 компьютеров, достигнутая реальная производительность составила 3–5 TFLOP/s). Для этого было сформировано множество из 1 255 884 расчетных заданий (англ.

Work Unit, сокр. WU), соответствующих различным корректным начальным заполнениям первых 10 ячеек ДЛК (первая строка фиксирована ввиду нормализации квадрата, порядок заполнения ячеек соответствует [5]). Для каждого начального заполнения было определено соответствующее ему число ДЛК (например, начальному заполнению «1203432456» соответствует 966210340 ДЛК, а заполнению «1203432457» – 951888032 ДЛК). Некоторым начальным заполнениям (например, «1203432485», «7865360354» и др.) не соответствует ни одного ДЛК. В результате постобработки полученных результатов (нахождения суммы числа ДЛК по указанным начальным заполнениям) было определено число нормализованных ДЛК порядка 9, которое составило 5 059 716 385 604 360. Путем умножения полученного значения на  $9!$  возможно определение общего числа ДЛК, составляющего 1 836 069 882 008 110 156 800. Несмотря на то, что расчеты в проекте Gerasim@Home были выполнены с кворумом 2 (каждое задание было посчитано дважды на различных машинах, результаты сверены), в настоящее время авторами с использованием вычислительного кластера «Академик В.М. Матросов» ИНЦ СО РАН ведется дополнительная проверка найденного значения числа нормализованных ДЛК.

Работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 14-07-00403-а, 15-07-07891-а, 16-07-00155-а, 17-07-00317 и 17-07-00617) и советом по грантам Президента РФ (стипендия № СП-1184.2015.5, грант МК-9445.2016.8). Авторы благодарят citerra[Russia Team] с интернет-портала VOINC.ru за помощь в разработке и реализации некоторых алгоритмов и всех добровольцев, принимавших участие в проекте.

## Литература

1. *Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г.* Основы дискретной комбинаторной оптимизации. – М.: АРГАМАК-МЕДИА. – 2016. 270 с.
2. *Ватутин Э.И.* Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrücken: LAP. – 2011. 292 с.
3. *Colbourn C.J., Dinitz J.H.* Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. Chapman&Hall. – 2006. 984 p.
3. <https://oeis.org/A000315>
4. *Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S.* Using grid systems for enumerating combinatorial objects on example of diagonal Latin squares // Distributed computing and grid-technologies in science and education (GRID'16): book of abstracts of the 7<sup>th</sup> international conference. Dubna: JINR. – 2016. p. 114–115.
5. *Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С.* О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы. Курск: изд-во ЮЗГУ. – 2016. С. 33–39.
6. <https://oeis.org/A274171>

7. <https://oeis.org/A274806>
8. *Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С.* Особенности использования взвешивающих эвристик в задаче поиска диагональных латинских квадратов // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2015. – № 3 (16). – С. 18–30.
9. <http://gerasim.boinc.ru>
10. *Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E.* On the construction of triples of diagonal Latin squares of order 10 // Proceedings of Discrete Mathematics Days, Barcelona, 6–8 July 2016, to appear in Electronic Notes in Discrete Mathematics (2016).