Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

2-ТРАНСВЕРСАЛИ В ПАРАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Ватутин Э.И.

Курск, 2023

Понятие ЛК и ДЛК

$A = \|a_{ij}\|$

$i,\ j = \overline{1,\ N}$

$N = |U|$

$U = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$

$$\forall i,\ j,\ k = \overline{1,\ N},\ j \neq k : \left(a_{ij} \neq a_{ik}\right) \wedge \left(a_{ji} \neq a_{ki}\right)$$

$$\forall i,\ j = \overline{1,\ N}, i \neq j : \left(a_{ii} \neq a_{jj}\right) \wedge \left(a_{N-i+1,\ N-i+1} \neq a_{N-j+1,\ N-j+1}\right)$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 2 & 9 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 0 & 8 \\
2 & 9 & 3 & 1 & 7 & 0 & 5 & 8 & 4 & 6 \\
3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 9 & 6 & 5 & 0 \\
4 & 3 & 5 & 9 & 2 & 1 & 8 & 0 & 6 & 7 \\
5 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & 0 & 9 & 7 & 3 \\
6 & 5 & 8 & 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 9 & 4 \\
7 & 8 & 6 & 0 & 9 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\
8 & 7 & 0 & 5 & 6 & 9 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
9 & 0 & 7 & 6 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{pmatrix}$$

Нормализованный ЛК порядка 10

$$N! \times (N-1)!$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
7 & 2 & 4 & 9 & 0 & 6 & 5 & 1 & 3 & 8 \\
8 & 3 & 6 & 7 & 5 & 9 & 0 & 2 & 4 & 1 \\
2 & 6 & 8 & 5 & 1 & 7 & 4 & 0 & 9 & 3 \\
5 & 8 & 9 & 1 & 7 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 \\
9 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 & 6 & 0 & 5 \\
4 & 7 & 5 & 6 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 0 \\
3 & 0 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 \\
6 & 5 & 0 & 4 & 3 & 2 & 9 & 8 & 1 & 7 \\
1 & 9 & 3 & 0 & 6 & 8 & 2 & 5 & 7 & 4
\end{pmatrix}$$

Нормализованный ДЛК порядка 10

$$(N-1)!$$

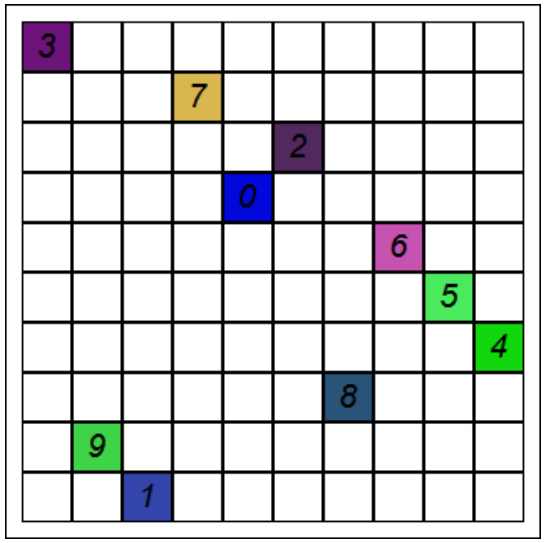
Понятие трансверсалей

Типы

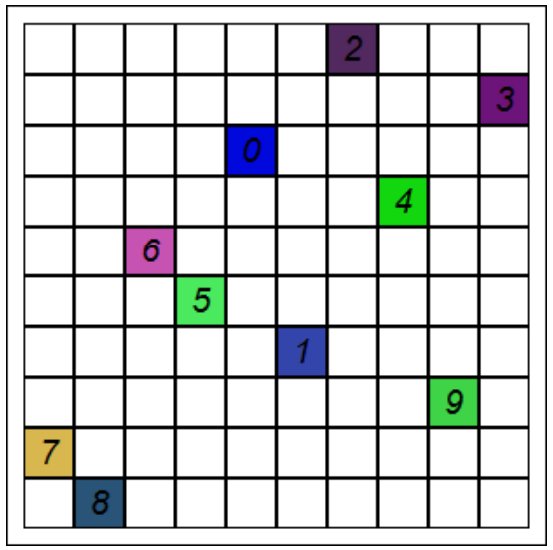
- трансверсали общего вида
- диагональные трансверсали

Мотивация

- метод Эйлера-Паркера (построение ОЛК/ОДЛК для заданного ЛК/ДЛК)
- некоторые алгоритмы (диагонализация, метод Гергели, …)



Пример диагональной трансверсали



Пример трансверсали общего вида

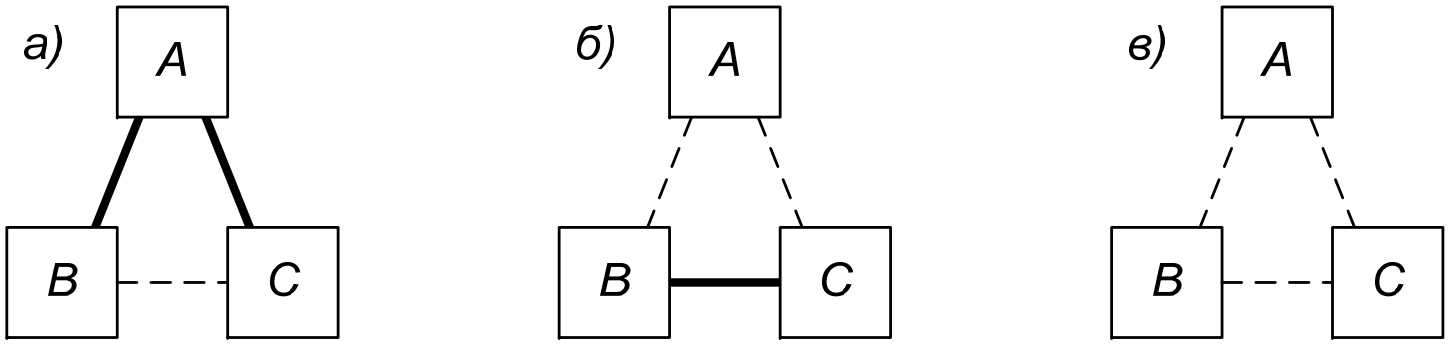
Тройки (псевдотройки) взаимно-ортогональных ЛК/ДЛК

Открытая математическая проблема: существование тройки взаимно-ортогональных ЛК/ДЛК порядка 10 (англ. MOLS/MODLS)

Тройка не найдена, известны псевдотройки с различными характеристиками ортогональности (сокр. ХО):

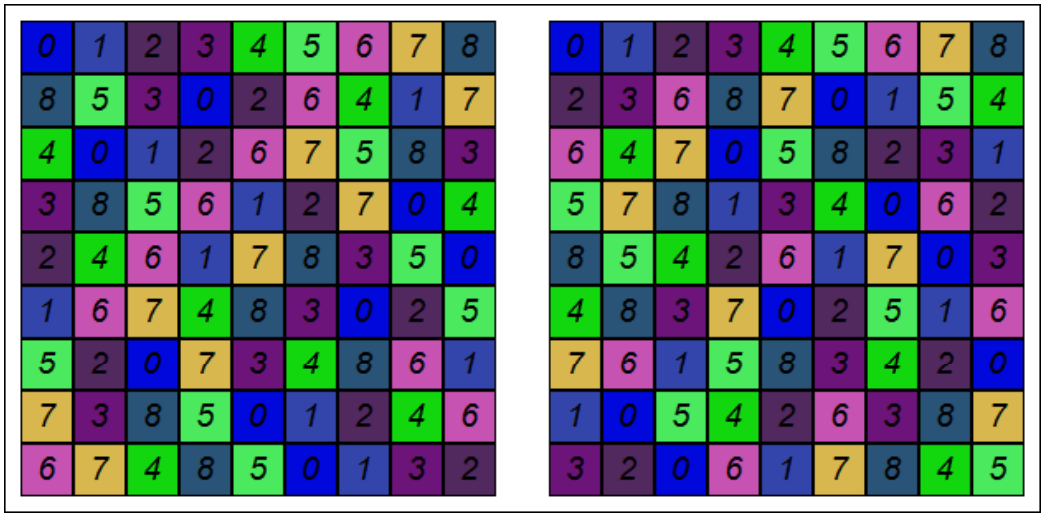
- для ЛК – ХО=291/300 (способ построения?);
- для ДЛК – ХО=274/300 (симметричный в плоскости ДЛК);
- ВОЛК порядка 10 мощности 4 «с дыркой» размером 2x2 (способ построения?).

3 различных типа псевдотроек…



Мальков В.В., Ватутин Э.И. Построение псевдотроек ДЛК порядка 10 с использованием метода случайного перебора // Интеллектуальные информационные системы: тенденции, проблемы, перспективы (ИИС – 2022). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2022. С. 113–116.

Понятие 2-трансверсалей



00 **11** 22 33 44 55 66 77 88
82 53 36 08 27 60 41 15 74
46 04 17 **20** 65 78 52 83 31
35 87 **58** 61 13 24 70 06 42
28 45 64 12 **76** 81 37 50 03
14 68 73 47 80 32 **05** 21 56
57 26 01 75 38 **43** 84 62 10
71 30 85 54 02 16 23 48 **67**
63 72 40 86 51 07 18 **34** 25

- трансверсаль в ортогональном массиве 4 x N^2
- необходимое и достаточное условие возможности построения тройки ВОЛК/ВОДЛК из пары ОЛК/ОДЛК: наличие N непересекающихся (диагональных) 2-трансверсалей
- если существует M<N попарно непересекающихся трансверсалей, то ХО > N*M

Числовые ряды, связанные с 2-трансверсалями в парах ОДЛК

2-трансверсали общего вида

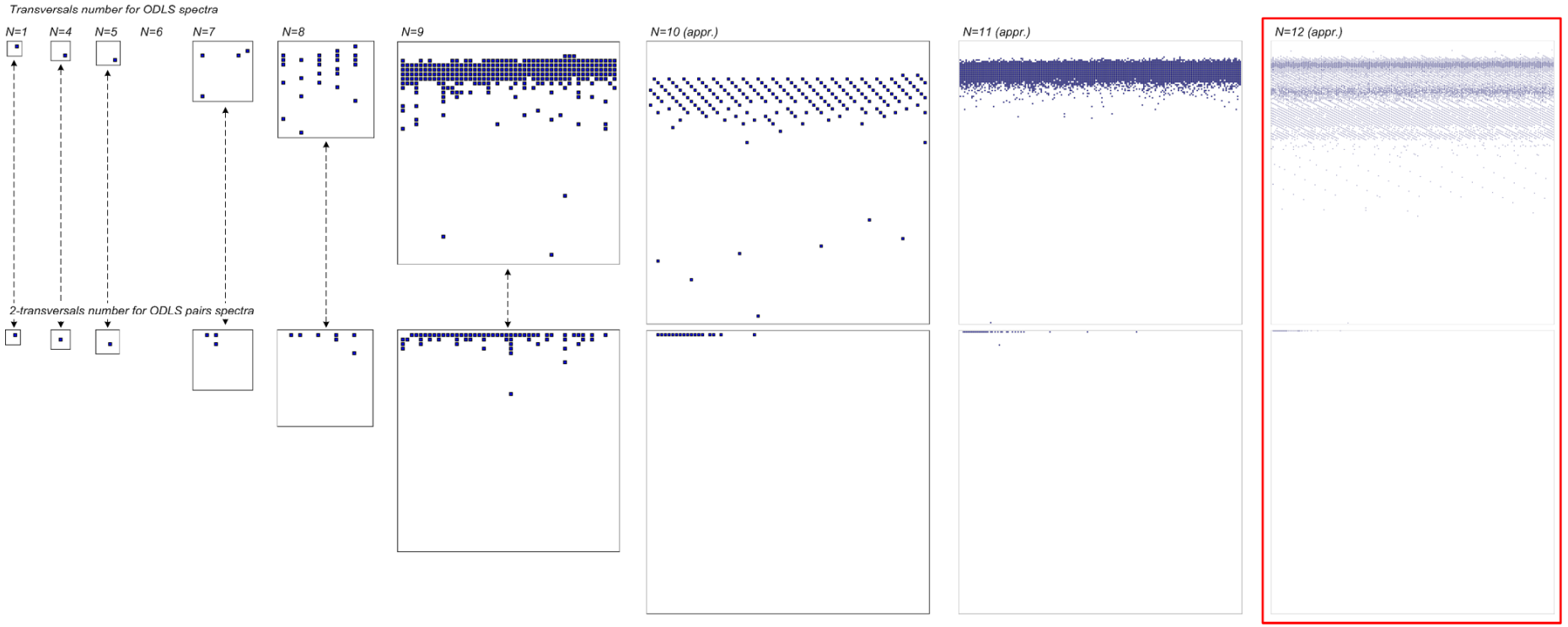
- минимальное количество – **1, 0, 0, 4, 10, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2** (далее a(N)>2 для всех N, для которых существуют ОДЛК)
- максимальное количество – **1, 0, 0, 4, 10, 0, 28, 96, 648 (a(10)≥48, a(11)≥1782, a(12)≥108)**
- мощность спектра – **1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 7, 66 (a(10)≥17, a(11)≥35, a(12)≥42)**

Диагональные 2-трансверсали

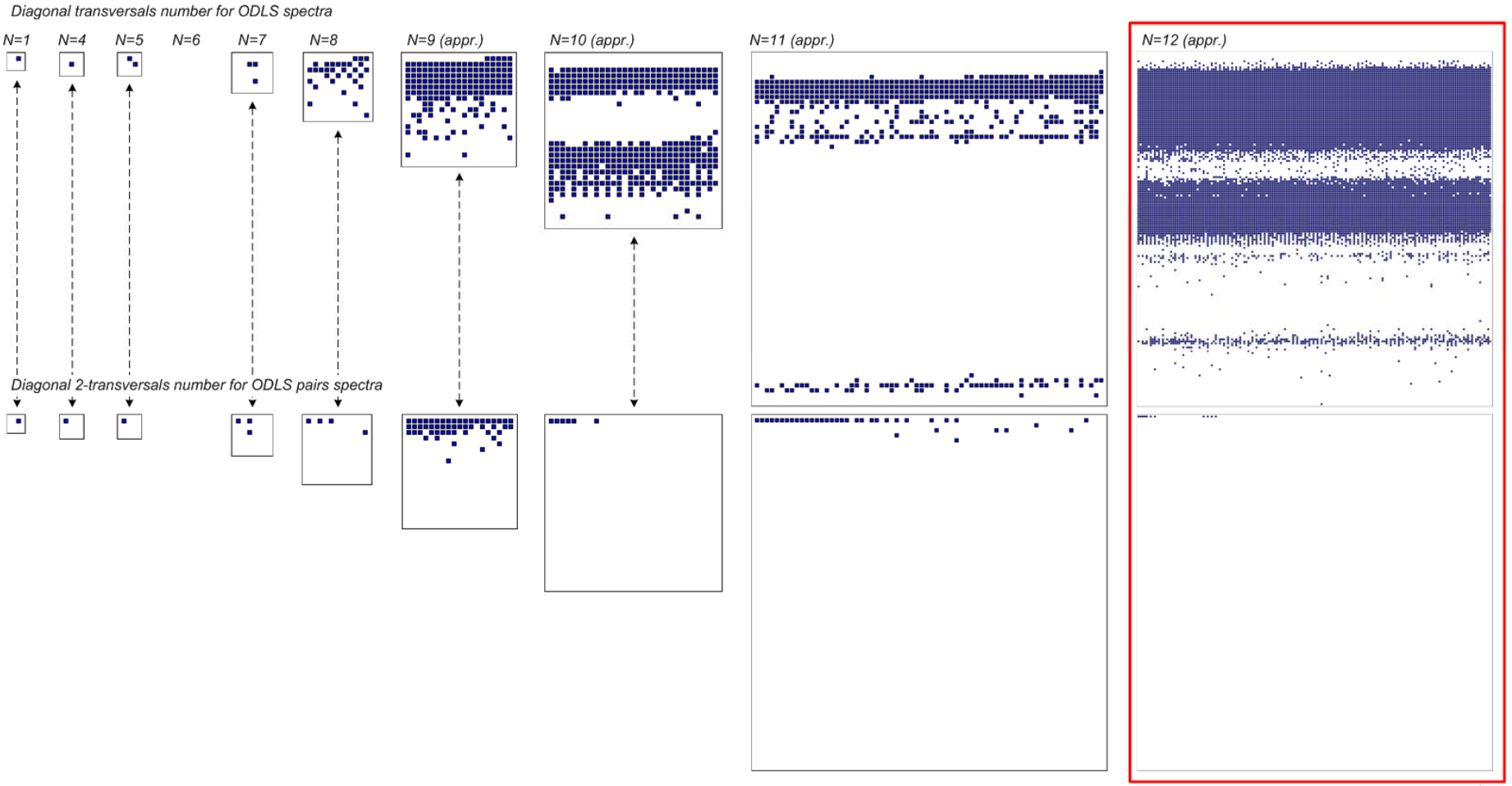
- минимальное количество – **1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0** (вероятно далее a(N)=0)
- максимальное количество – **1, 0, 0, 0, 0, 0, 14, 32, 140 (a(10)≥8, a(11)≥320, a(12)≥38, a(13)≥992)**
- мощность спектра – **1, 0, 0, 1, 1, 0, 3, 4, 53 (a(10)≥6, a(11)≥37, a(12)≥11, a(13)≥14)**

Все найденные числовые ряды новые и планируются к добавлению в OEIS

Графическое представление спектров числа 2-трансверсалей в парах ОДЛК



Графическое представление спектров числа диагональных 2-трансверсалей в парах ОДЛК



Типы квадратов, обладающих большим числом 2-трансверсалей

Порядок N:

- N=7 – центрально симметричный, DSODLS/ESODLS
- N=8 – дважды симметричный, квадрат Брауна, ESODLS
- N=9 – ESODLS
- N=10 – SODLS/ESODLS
- N=11 – либо циклические, либо DSODLS/ESODLS
- N=12 – диагонализированные блочные ДЛК 3x4 (198 144 трансверсали)
- N=13 – SODLS/DSODLS/ESODLS

Актуальность эксперимента по получению всех ESODLS порядка 10!

Ватутин Э.И. Специальные виды диагональных латинских квадратов // Облачные и распределенные вычислительные системы в электронном управлении (ОРВСЭУ – 2022) в рамках Национального суперкомпьютерного форума (НСКФ – 2022). Переславль-Залесский, 2023. С. 9–18.

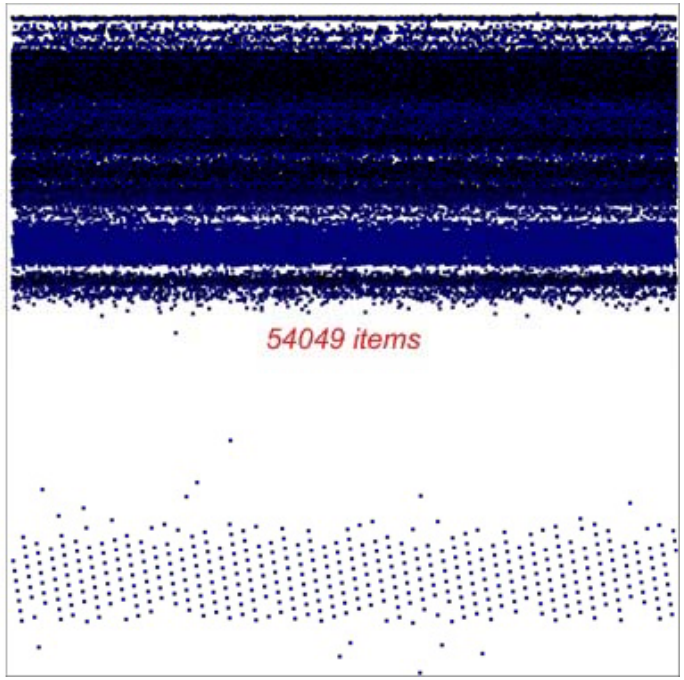
Дополнительная информация

Если у меня есть пара минут...

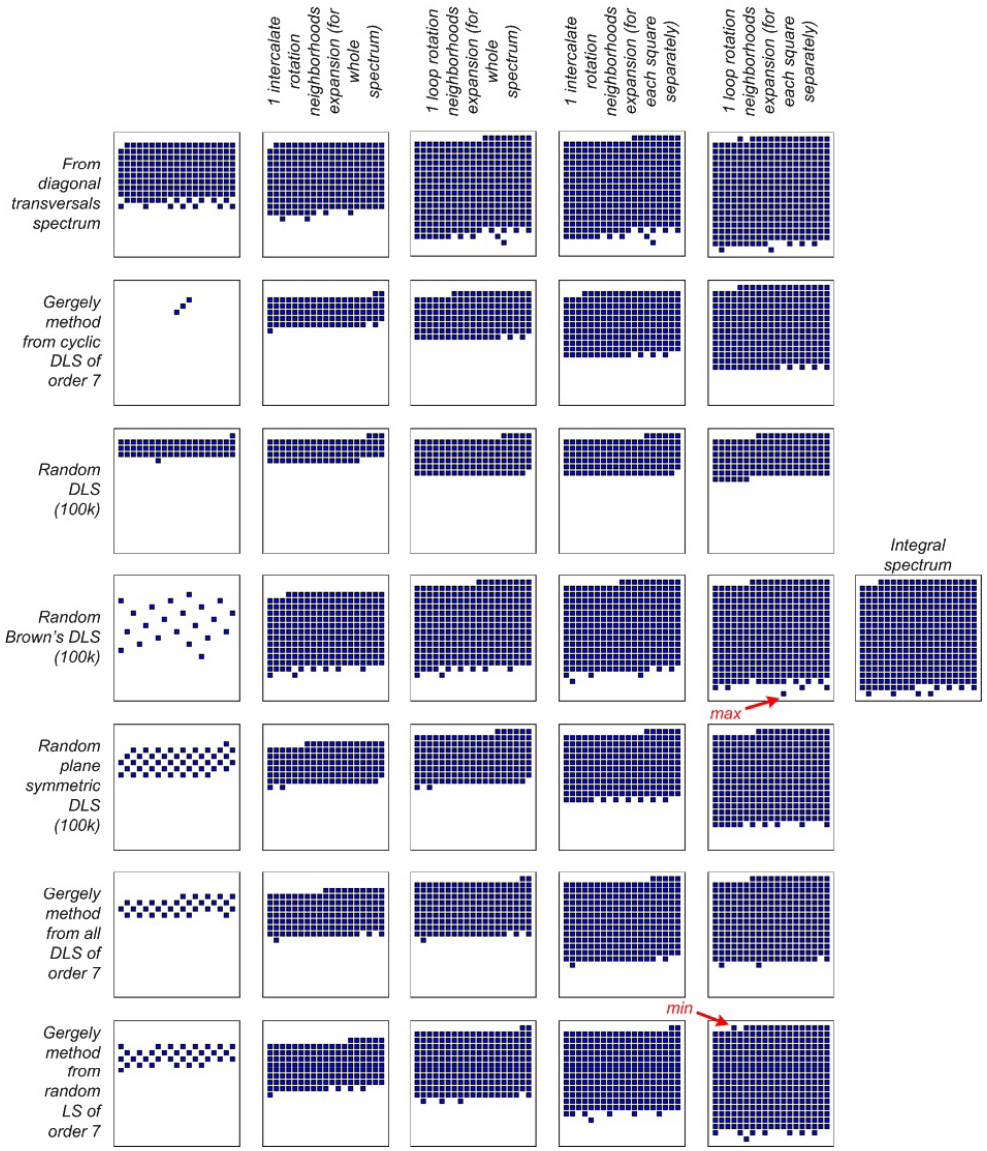
Текущие эксперименты со спектрами ДЛК общего вида

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M1	M1	To Do	x
Диагональные трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	d	d	d	d	M1	To Do	x
Интеркаляты	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M1	M1	To Do	...
ОДЛК	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	s	s	s	To Do	x?	x?	

From diagonal transversals spectrum



Примеры «интересных» и «не интересных» спектров

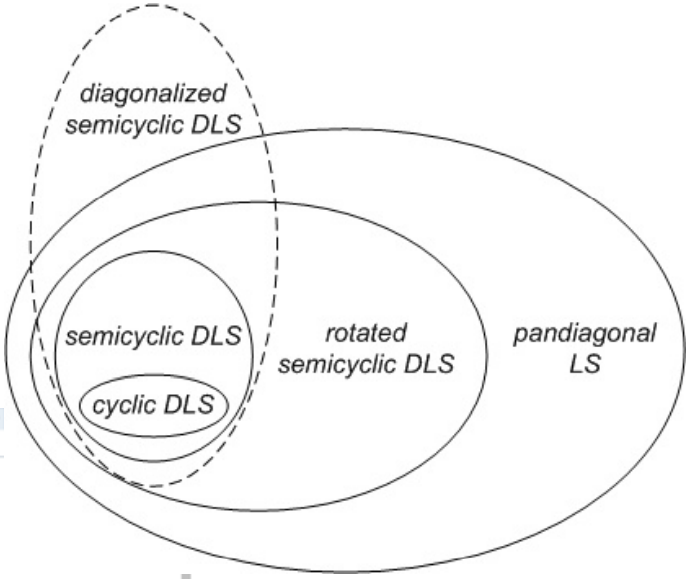


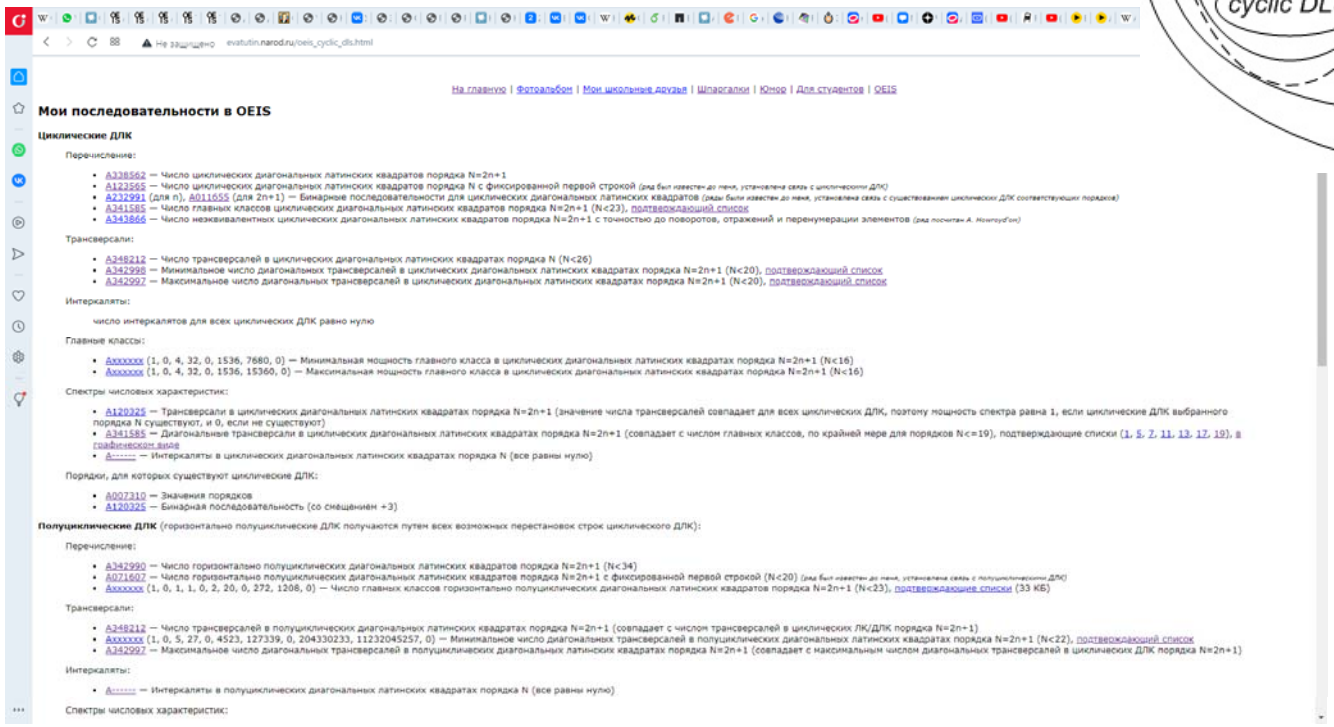
Аппроксимация спектра числа интеркалятов в ДЛК порядка 14

Исследование свойств циклических ДЛК

Типы циклических ДЛК:

- циклические
- полуциклические
- повернутые полуциклические
- диагонализированные циклические





На главную | Фотоальбом | Мои школьные друзья | Шпаргалки | Юмор | Для студентов | OEIS

Мои последовательности в OEIS

Циклические ДЛК

Перечисление:

- A338562 — Число циклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1
- A123565 — Число циклических диагональных латинских квадратов порядка N с фиксированной первой строкой (ряд был известен до меня, установлена связь с циклическими ДЛК)
- A232991 (для n), A011655 (для 2n+1) — Бинарные последовательности для циклических диагональных латинских квадратов (ряды были известен до меня, установлена связь с существованием циклических ДЛК соответствующих порядков)
- A341585 — Число главных классов циклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1 (N<23), подтверждающий список
- A343866 — Число неэквивалентных циклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1 с точностью до поворотов, отражений и перенумерации элементов (ряд посчитан А. Монтойа'ом)

Трансверсали:

- A348212 — Число трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка N (N<26)
- A342996 — Минимальное число диагональных трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (N<20), подтверждающий список
- A342997 — Максимальное число диагональных трансверсалей в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (N<20), подтверждающий список

Интеркаляты:

число интеркалятов для всех циклических ДЛК равно нулю

Главные классы:

- Axxxxxx (1, 0, 4, 32, 0, 1536, 7680, 0) — Минимальная мощность главного класса в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (N<16)
- Axxxxxx (1, 0, 4, 32, 0, 1536, 15360, 0) — Максимальная мощность главного класса в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (N<16)

Спектры числовых характеристик:

- A120325 — Трансверсали в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (значение числа трансверсалей совпадает для всех циклических ДЛК, поэтому мощность спектра равна 1, если циклические ДЛК выбранного порядка N существуют, и 0, если не существуют)
- A341585 — Диагональные трансверсали в циклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (совпадает с числом главных классов, по крайней мере для порядков N<=19), подтверждающие списки (1, 5, 7, 11, 13, 17, 19), в графическом виде
- A------ — Интеркаляты в циклических диагональных латинских квадратах порядка N (все равны нулю)

Порядки, для которых существуют циклические ДЛК:

- A007310 — Значения порядков
- A120325 — Бинарная последовательность (со смещением +3)

Полуциклические ДЛК (горизонтально полуциклические ДЛК получаются путем всех возможных перестановок строк циклического ДЛК):

Перечисление:

- A342990 — Число горизонтально полуциклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1 (N<34)
- A071607 — Число горизонтально полуциклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1 с фиксированной первой строкой (N<20) (ряд был известен до меня, установлена связь с полуциклическими ДЛК)
- Axxxxxx (1, 0, 1, 1, 0, 2, 20, 0, 272, 1208, 0) — Число главных классов горизонтально полуциклических диагональных латинских квадратов порядка N=2n+1 (N<23), подтверждающие списки (33 КБ)

Трансверсали:

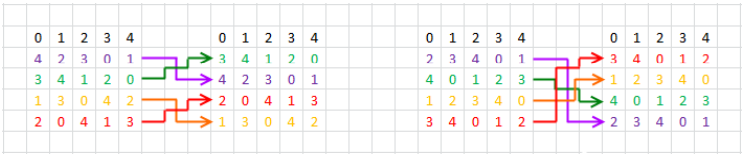
- A348212 — Число трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (совпадает с числом трансверсалей в циклических ЛК/ДЛК порядка N=2n+1)
- Axxxxxx (1, 0, 5, 27, 0, 4523, 127339, 0, 204330233, 11232045257, 0) — Минимальное число диагональных трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (N<22), подтверждающий список
- A342997 — Максимальное число диагональных трансверсалей в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка N=2n+1 (совпадает с максимальным числом диагональных трансверсалей в циклических ДЛК порядка N=2n+1)

Интеркаляты:

- A------ — Интеркаляты в полуциклических диагональных латинских квадратах порядка N (все равны нулю)

Спектры числовых характеристик:

http://evatutin.narod.ru/oeis_cyclic_dls.html



Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам, принимающим участие в проекте добровольных распределенных вычислений RakeSearch!

WWW: http://evatutin.narod.ru,
https://rake.boincfast.ru/rakesearch/
E-mail: evatutin@rambler.ru