УДК 519.1

Э.И. ВАТУТИН, А.Д. БЕЛЫШЕВ, О.С. ЗАИКИН, Н.Н. НИКИТИНА, М.О. МАНЗЮК

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЙ В ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДОБРОВОЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Статья посвящена рассмотрению свойств симметрии в диагональных латинских квадратах. Для известных плоскостных (вертикальной и горизонтальной) и центральной (точечной и смещенной точечной) симметрий приведено единое формальное описание, позволяющее производить описание симметрий с использованием единого набора формул, производящих биективное отображение координат ячеек квадрата. Показано, что в дополнение к формулам, описывающим перечисленные типы симметрии в виде простых линейных функций, дополнительно могут быть найдены как минимум еще 5 формул, также описывающие симметрии в обобщенной форме. С их использованием возможно описание 25 симметрий, из которых (с точностью до транспонирования квадрата) уникальными являются 15, из которых существуют 9 (включая тривиальную). Показано, что данные обобщенные симметрии, в отличие от рассмотренных ранее плоскостных и центральной, не инвариантны относительно М-преобразований. Показано, что обобщенные симметрии также могут быть записаны через перестановки, что решает указанную проблему не инвариантности. В результате вычислительного эксперимента, направленного на поиск обобщенно симметричных ортогональных диагональных латинских квадратов, в дополнение к известным был найден ряд редких комбинаторных структур. В рассмотренном классе обобщенных симметрий улучшить рекордную характеристику ортогональности для псевдотройки попарно ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10, равную 274, не удалось.

Ключевые слова: *комбинаторика, диагональные латинские квадраты, ортогональные диагональные латинские квадраты, обобщенные симметрии, добровольные распределенные вычисления, Gerasim@Home, BOINC.*

В настоящее время существует большое количество комбинаторных задач, допускающих отыскание решения путем разбиения на множество независимых друг от друга подзадач меньшей вычислительной сложности. К ним относятся задачи на пересчет (необходимо определить число комбинаторных объектов заданной размерности N), задачи на оптимальность (необходимо решить задачу дискретной комбинаторной оптимизации и отыскать ее оптимальное либо суб- или квазиоптимальное решение) и задачи на существование (необходимо найти решение, удовлетворяющее сильным ограничениям среди множества других). С учетом слабой связности подзадач между собой одним из классов вычислительных систем, допускающих их эффективное решение, являются грид-системы на добровольной основе. Они позволяют использовать имеющиеся в наличии гетерогенные вычислительные ресурсы добровольцев для решения исходной задачи под управлением сервера проекта. Наиболее крупной платформой, в настоящее время объединяющей в своем составе более 60 различных проектов, является платформа BOINC. Ее возможности были использованы для организации вычислений в рамках проекта Gerasim@Home, направленных на исследование свойств обобщенных симметрий в диагональных латинских квадратах, подробно рассмотренных в данной статье.

Одним из известных типов комбинаторных объектов, находящим применение в ряде фундаментальных и прикладных областей науки, являются *латинские квадраты* [1]. Латинским квадратом (ЛК) порядка N называется квадратная таблица $A = \|a_{ij}\|,\ i, j = \overline{1, N}$, элементами a_{ij} которой являются элементы некоторого множества U мощности $N = |U|$ (для определенности далее будем полагать, что $U = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$). По определению в каждой строке и в каждом столбце латинского квадрата каждый из элементов множества U встречается в точности один раз:

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \ne k : (a_{ij} \ne a_{ik}) \wedge (a_{ji} \ne a_{ki}). \quad (1)$$

Для *диагональных латинских квадратов* (ДЛК), являющихся специальным видом ЛК, по определению дополнительно вводятся требования на отсутствие совпадающих элементов на главной и побочной диагонали ЛК:

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \ne j : (a_{ii} \ne a_{jj}) \wedge (a_{i, N-i+1} \ne a_{j, N-j+1}). \quad (2)$$

При решении ряда задач (поиск тройки взаимно-ортогональных ЛК и ДЛК (сокр. ВОЛК и ВОДЛК соответственно) порядка 10 [1–6], оценка экстремальных характеристик ДЛК [7–10], построение и подсчет ортогональных ДЛК (ОДЛК) и комбинаторных структур на их базе [8, 11] и пр.) время соответствующих вычислительных экспериментов может быть существенно сокращено путем рассмотрения только одного ДЛК из соответствующего класса изоморфизма, в рамках которого образующие его квадраты эквивалентны (имеют одинаковые свойства, такие как наличие плоскостной симметрии, число и структура трансверсалей, число ОДЛК, интеркалятов и т.п.). Путем биективной подстановки (перестановки) σ значений элементов любой ДЛК может быть приведен к заданному виду с *фиксированной первой строкой*. Как правило, при этом значения элементов первой строки без потери общности упорядочиваются по возрастанию, а соответствующий ДЛК называется *нормализованным*. Лексикографически минимальный квадрат в рамках класса изоморфизма называется его *канонической формой* (КФ) [12].

В настоящий момент возможность построения тройки ВОДЛК порядка 10 или доказательство ее несуществования является открытой математической проблемой [1]. Наилучшим известным приближением к ее решению является псевдотройка из трех ДЛК [13], в которой 2 пары квадратов ортогональны, а третья ортогональна в 74 ячейках, что в совокупности обеспечивает значение *характеристики ортогональности* (ХО) 274 из 300 (действующий мировой рекорд по указанной характеристике для указанного типа квадратов). Квадрат, образующий данную тройку, обладает интересными свойствами: он является горизонтально симметричным [14, 15] и строчно-инверсным (его строки можно разбить на два множества, каждая из 5 строк первого из них получаются путем замены порядка следования элементов 5 строк второго на обратный). Впервые квадрат такого типа был описан в работе [16], но для найденного (Brown et al.) ДЛК характеристика ортогональности составляет лишь 260.

Осенью 2017 г. в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home на платформе BOINC [17] был организован вычислительный эксперимент, в ходе которого были построены канонические формы всех возможных горизонтально-симметричных ДЛК, для них были найдены ОДЛК и рассчитаны соответствующие характеристики ортогональности. В результате эксперимента было установлено, что существует лишь одна горизонтально-симметричная КФ ОДЛК, образующая псевдотройку с характеристикой ортогональности 274, которая была найдена ранее рандомизированным алгоритмом и описана в [13] (рис. 1).

ХО=74 (ДЛК A ↔ ДЛК C)

ХО=100 (ДЛК A ↔ ДЛК B)

ХО=100 (ДЛК B ↔ ДЛК C)

ДЛК A

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	8	6	7	9	4	0	3	1	2
6	4	7	8	2	9	1	0	5	3
7	6	5	4	8	1	2	9	3	0
3	0	9	2	1	8	7	5	4	6
2	5	0	1	6	3	8	4	9	7
8	3	4	5	7	0	9	2	6	1
1	2	3	9	5	7	4	6	0	8
9	7	8	0	3	6	5	1	2	4
4	9	1	6	0	2	3	8	7	5

ДЛК B

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	0	9	5	6	7	8
4	0	1	7	3	6	2	8	9	5
8	7	6	5	9	0	4	3	2	1
7	6	5	0	8	1	9	4	3	2
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
5	9	8	2	6	3	7	1	0	4
3	5	0	8	7	2	1	9	4	6
2	3	4	9	1	8	0	5	6	7
6	4	9	1	2	7	8	0	5	3

ДЛК C

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	9	0	2	3	6	7	8	4	1
1	7	3	5	9	0	8	6	2	4
9	2	1	6	0	4	3	5	7	8
3	4	9	8	2	7	5	0	1	6
7	5	6	9	1	8	4	3	0	2
8	3	4	0	7	2	1	9	6	5
6	0	5	7	8	1	2	4	9	3
4	8	7	1	6	3	9	2	5	0
2	6	8	4	5	9	0	1	3	7

Пара ОДЛК BC

00	11	22	33	44	55	66	77	88	99
15	29	30	42	03	96	57	68	74	81
41	07	13	75	39	60	28	86	92	54
89	72	61	56	90	04	43	35	27	18
73	64	59	08	82	17	95	40	31	26
97	85	76	69	51	48	34	23	10	02
58	93	84	20	67	32	71	19	06	45
36	50	05	87	78	21	12	94	49	63
24	38	47	91	16	83	09	52	65	70
62	46	98	14	25	79	80	01	53	37

Пара ОДЛК AB

00	11	22	33	44	55	66	77	88	99
51	82	63	74	90	49	05	36	17	28
64	40	71	87	23	96	12	08	59	35
78	67	56	45	89	10	24	93	32	01
37	06	95	20	18	81	79	54	43	62
29	58	07	16	65	34	83	42	91	70
85	39	48	52	76	03	97	21	60	14
13	25	30	98	57	72	41	69	04	86
92	73	84	09	31	68	50	15	26	47
46	94	19	61	02	27	38	80	75	53

Пара ОДЛК AC

00	11	22	33	44	55	66	77	88	99
—	89	60	72	93	46	07	38	14	21
61	47	73	85	29	90	18	06	52	34
79	62	51	—	80	—	23	95	37	08
—	04	—	28	12	87	75	50	41	—
27	—	—	19	—	—	84	43	—	—
—	—	—	—	—	02	91	—	—	15
16	20	35	97	58	71	42	64	09	83
94	78	—	01	36	63	59	—	25	40
—	96	—	—	05	—	30	81	—	57

Рис. 1. Псевдотройка с рекордной характеристикой ортогональности 274. Вертикальной жирной линией выделена ось симметрии квадрата *B*, серым в качестве примера отмечены симметрично расположенные относительно нее пары значений 3 и 6; жирными прямоугольниками в качестве примера выделена пара строк квадрата *B*, образующих строчную инверсию; стрелками показаны соответствующие характеристики ортогональности в парах ДЛК; нижний ряд показывает пары значений в составе ОДЛК, нарушения отмечены прочерками

Все остальные найденные комбинаторные структуры [11] и соответствующие им образующие ДЛК обладают меньшими значениями характеристик ортогональности, а с использованием данной плоскостной симметрии увеличить указанную характеристику ортогональности, как показал эксперимент, не представляется возможным. Вызывает интерес отыскание других типов симметрии с целью попытки увеличения указанного значения характеристики ортогональности.

Еще одним типом симметрии, которым обладают ДЛК некоторых размерностей, является центральная симметрия [18]. Соответствующие ей ДЛК для ряда размерностей *N* обладают интересными свойствами (например, большим числом ОДЛК), однако для интересующей размерности $N = 10$ указанные ДЛК, по-видимому, не существуют, что исключает возможность увеличения приведенной выше характеристики ортогональности с ее использованием.

ДЛК потенциально могут обладать и другими симметриями, которые будем называть *обобщенными*. Будем называть ДЛК *обладающим обобщенной симметрией*, если для него возможно ввести такие три функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $U \times U \to U$, и $h(\nu)$, $U \to U$, с помощью которых можно задать взаимно однозначное соответствие между парами ячеек ДЛК с координатами $[i, j] \Leftrightarrow [i', j']$, $i' = f(i, j)$, $j' = g(i, j)$, $i = f(i', j')$, $j = g(i', j')$, и находящимися в них значениями $\nu_1 = a_{ij}$, $\nu_2 = a_{i'j'}$, $h(\nu_1) = \nu_2$, $h(\nu_2) = \nu_1$ (на рис. 1 одна из подобных пар значений $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 6$, образующих соответствие, выделена серым). Для горизонтальной симметрии соответствующие функции имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} f(x, y) = x, \\ g(x, y) = N - 1 - y, \end{gathered} \tag{3}$$

для вертикальной:

$$\begin{gathered} f(x, y) = N - 1 - x, \\ g(x, y) = y, \end{gathered} \tag{4}$$

а для центральной симметрии:

$$\begin{gathered} f(x, y) = N - 1 - x, \\ g(x, y) = N - 1 - y. \end{gathered} \tag{5}$$

Для центральной симметрии введем понятие *центра симметрии*, т.е. точки, относительно которой осуществляется симметричное отражение. Для квадратов, обладающих центральной симметрией [18], соответствующий центр симметрии находится в центре квадрата, т.е. в точке с координатами $\left[\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right]$, где $\lfloor x \rfloor$ – операция округления вниз (усечения). Данный центр симметрии можно сместить, если рассматривать ДЛК в виде тора, т.е. допустить циклические перестановки его строк и столбцов (повороты квадрата по вертикали и горизонтали на торе), приводящие к перемещению выбранного центра симметрии в точку с координатами $\left[\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right]$, соответствующими центральной симметрии без смещения центра (рис. 2).

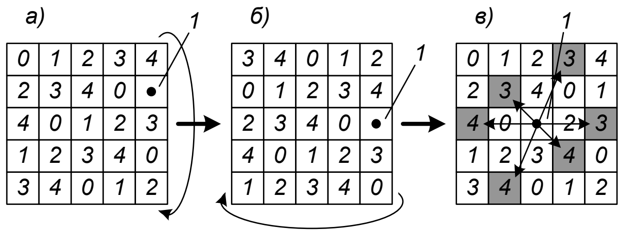

Рис. 2. Пример, поясняющий повороты ДЛК на торе с целью смещения центра симметрии (отмечен точкой): а – исходный квадрат со смещенным центром симметрии; б – квадрат, полученный из исходного путем циклического поворота на торе на 1 строку вниз; в – квадрат, полученный из квадрата (б) путем циклического поворота на торе на 2 столбца влево, соответствия между симметричными относительно центра значениями элементов 3 и 4 выделены стрелками, соответствующие ячейки обозначены серым

Функции, описывающие данную *смещенную точечную симметрию*, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} f(x, y) = N - x - k_1 (\bmod N), \\ g(x, y) = N - y - k_2 (\bmod N), \end{gathered} \tag{6}$$

где k_1 и k_2 – некоторые целочисленные коэффициенты, причем $0 \le k_1, k_2 \le N-1$. Координаты центра симметрии при этом будут иметь значения $\left[k_1 - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor (\operatorname{mod} N), k_2 - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor (\operatorname{mod} N)\right]$. Примеры квадратов, обладающей смещенной точечной симметрией, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Примеры ДЛК, обладающих смещенной точечной симметрией

ДЛК	**Координаты центров симметрии**	**Свойства**
0 1 2 3 4 2 3 4 0 1 4 0 1 2 3 1 2 3 4 0 3 4 0 1 2	$\left.\begin{matrix}[0,0],\\ [0,1],\\ .....\\ [0,4],\\ .....\\ [4,4]\end{matrix}\right\}25\text{ штук}$	1. Пандиагональный. 2. 1 ОДЛК.
0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 0 1 6 7 4 5 6 7 5 4 3 2 0 1 5 4 6 7 0 1 3 2 3 2 7 6 1 0 5 4 7 6 3 2 5 4 1 0 4 5 1 0 7 6 2 3 1 0 4 5 2 3 7 6	[3,3], [7,7]	1. Центры точечной симметрии на главной диагонали. 2. Горизонтально-симметричный, вертикально-симметричный, итого 2 плоскостные симметрии. 3. 2 точечных симметрии, итого 4 симметрии и $2^4 = 16$ ОДЛК.
0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 1 0 7 6 4 5 5 4 7 6 1 0 3 2 6 7 5 4 3 2 0 1 7 6 3 2 5 4 1 0 3 2 6 7 0 1 5 4 4 5 0 1 6 7 2 3 1 0 4 5 2 3 7 6	[3,3], [7,3]	1. Горизонтально-симметричный, вертикально-симметричный, итого 2 плоскостные симметрии. 2. 2 точечных симметрии, итого 4 симметрии и $2^4 = 16$ ОДЛК 3. Самоортогональный ДЛК (англ. SODLS) [19, 20].
0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 0 1 6 7 4 5 4 5 6 7 0 1 2 3 6 7 4 5 2 3 0 1 3 2 1 0 7 6 5 4 1 0 3 2 5 4 7 6 7 6 5 4 3 2 1 0 5 4 7 6 1 0 3 2	[3,3], [3,7], [7,3], [7,7]	1. Горизонтально-симметричный, вертикально-симметричный. 2. Строчно-инверсный, столбце-инверсный. 3. SODLS. 4. 824 ОДЛК.
0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 0 1 6 7 4 5 4 5 6 7 3 2 1 0 6 7 4 5 1 0 3 2 3 2 1 0 7 6 5 4 1 0 3 2 5 4 7 6 7 6 5 4 0 1 2 3 5 4 7 6 2 3 0 1	[1,3], [3,3], [5,3], [7,3]	1. 4 центра симметрии на одной вертикальной прямой. 2. 4 ОДЛК.
0 1 2 3 4 5 6 7 8 4 5 3 7 8 6 1 2 0 6 7 8 0 1 2 3 4 5 8 6 7 2 0 1 5 3 4 5 3 4 8 6 7 2 0 1 2 0 1 5 3 4 8 6 7 1 2 0 4 5 3 7 8 6 3 4 5 6 7 8 0 1 2 7 8 6 1 2 0 4 5 3	[3,0], [3,3], [3,6]	1. 3 центра симметрии на одной горизонтальной прямой. 2. 360 ОДЛК.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 6 7 8 0 1 2 3 4 5 3 4 5 6 7 8 0 1 2 8 6 7 2 0 1 5 3 4 5 3 4 8 6 7 2 0 1 2 0 1 5 3 4 8 6 7 4 5 3 7 8 6 1 2 0 1 2 0 4 5 3 7 8 6 7 8 6 1 2 0 4 5 3	$[0,0]$, $[0,3]$, $[0,6]$, $[3,0]$, $[3,3]$, $[3,6]$, $[6,0]$, $[6,3]$, $[6,6]$	1. 9 равноудаленных друг от друга на торе центров симметрии. 2. SODLS. 3. 516 ОДЛК.

ДЛК со смещенным центром симметрии для размерности $N = 10$, по-видимому, не существуют, как и центрально-симметричные ДЛК.

Рассматривая пары функций *f* и *g*, описывающих соответствующие симметрии (3)–(6), как некоторую обобщенную вектор-функцию $\vec{X'} = \vec{F}(\vec{X})$, где $\vec{X} = [x, y]$, $\vec{X'} = [x', y']$, $\vec{F}(\vec{X}) = [f(\vec{X}), g(\vec{X})]$, можно заметить ряд особенностей:

$$\vec{F}(\vec{X}) = \vec{F}^{-1}(\vec{X}), \tag{7}$$

$$\vec{F}(\vec{F}(\vec{X})) = \vec{F}(\vec{F}^{-1}(\vec{X})) = \vec{F}^{-1}(\vec{F}(\vec{X})) = \vec{E}(\vec{X}), \tag{8}$$

где $\vec{E}(\vec{X}) = \vec{X}$.

Запишем функции *f* и *g* в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= Ax + By + C (\operatorname{mod} N), \\ g(x,y) &= Dx + Ey + F (\operatorname{mod} N), \end{aligned} \tag{9}$$

где $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{Z}$ – некоторые числовые коэффициенты.

Вектор значений коэффициентов $\vec{K} = [A, B, C, D, E, F]$ однозначно определяет одну из симметрий. Так, рассмотренным выше симметриям (3)–(6) соответствуют следующие вектора значений коэффициентов (табл. 2).

Таблица 2

Вектора значений коэффициентов, соответствующие рассмотренным выше симметриям

Симметрия	**Формулы**	**Вектор коэффициентов** $\vec{K}$
Горизонтальная	(1)	$[1,0,0,0,-1,N-1]$
Вертикальная	(2)	$[-1,0,N-1,0,1,0]$
Центральная	(3)	$[-1,0,N-1,0,-1,N-1]$
Смещенная точечная	(4)	$[-1,0,N-k_1,0,-1,N-k_2]$

Несложно заметить, что для всех найденных типов симметрии $A \in \{-1,1\}$, $B = 0$, $D = 0$, $E \in \{-1,1\}$. Другими словами, функции *f* и *g* имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \pm x + C (\operatorname{mod} N), \\ g(x,y) &= \pm y + F (\operatorname{mod} N), \end{aligned} \tag{10}$$

или, что по сути то же самое, для одной плоскости:

$$h(z) = \pm z + G (\operatorname{mod} N), \tag{11}$$

где *z* – изменяющаяся в выбранной плоскости координата, $z \in \{x, y\}$, *G* – некоторая константа. Для ДЛК порядка 10 дополнительно удалось найти 5 различных функций вида (11), которым соответствуют следующие формулы (табл. 3).

Таблица 3

Функции вида (11), удовлетворяющие (7) и (8), для ДЛК порядка 10

Номер функции	**Функция** $h(z)$	**Коэффициенты**
1	z	$[1,0]$
2	$z+5$	$\left[1,\left\lfloor \frac{N}{2}\right\rfloor\right]=[1,5]$
3	$-z+4$	$\left[-1,\left\lfloor \frac{N}{2}\right\rfloor-1\right]=[-1,4]$
4	$-z+9$	$[-1,N-1]=[-1,9]$
5	$-z+1$	$[-1,1]$

С учетом того, что латинский квадрат является двумерной структурой, комбинируя приведенные в таблице 3 функции, теоретически можно подобрать $5^2=25$ различных обобщенных симметрий, которые будем обозначать как (xy)-симметрия, где значения x и y определяют номера соответствующих функций вида (11). (11)-симметрию будем называть тривиальной, т.к. в ней каждый элемент ДЛК по сути соответствует сам себе, а такой симметрией обладает каждый ДЛК.

Поворот ДЛК на $90°$ или его отражение относительно главной или побочной диагонали меняет роли строк и столбцов, что приводит к перестановке индексов функций (11) в записи симметрии: (xy)-симметрия становится (yx)-симметрий, но не приводит к получению новых канонических форм ДЛК [12] в рамках соответствующего класса изоморфизма. Ввиду наличия указанной особенности можно ограничиться рассмотрением только таких симметрий, у которых либо $x \le y$, либо $x \ge y$ (в организованных вычислительных экспериментах было использовано первое неравенство). В таком случае число различных (с позиции возможности нахождения уникальных канонических форм ДЛК) обобщенных симметрий уменьшается до 15 (рис. 3).

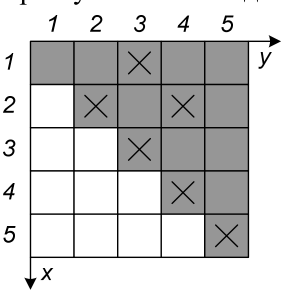

Рис. 3. (xy)-симметрии, обеспечивающие получение уникальных канонических форм ДЛК. Серым отмечены обобщенные симметрии для условия $x \le y$, обеспечивающие получение уникальных канонических форм, крестами отмечены обобщенные симметрии, для которых ДЛК порядка 10 не существуют

Для некоторых обобщенных симметрий (например, (13)- или (24)-симметрии) полным перебором установлено, что соответствующие им корректные ДЛК порядка 10 отсутствуют, что отмечено на рисунке 3 крестами. Примеры ДЛК порядка 10, соответствующие различным обобщенным симметриям, приведены в таблице 4.

Для некоторых ДЛК возможно наличие сразу нескольких различных видов симметрий. Так, например, в работах [14, 15] приведено описание дважды симметричных квадратов (в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно, для размерности $N=10$ таких квадратов не существует, однако они есть как минимум для размерностей 4 и 8, и, скорее всего, для всех размерностей $N=4n$, $n \in \mathbf{N}$) – им соответствуют (14)- и (41)-симметрии в соответствии с определениями обобщенных симметрий, введенными в текущей статье, а квадрат, приведенный в таблице 4 как пример (35)-симметрии, на самом деле имеет еще 6 обобщенных симметрий, не считая тривиальной.

Таблица 4

Различные обобщенные симметрии и соответствующие им ДЛК порядка 10

Обобщенная симметрия	**Пример соответствующего ей ДЛК**
(12)-симметрия	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 4 2 3 5 1 9 7 8 0 6 2 0 1 8 9 7 5 6 3 4 5 6 7 4 8 0 1 2 9 3 7 4 0 1 3 2 9 5 6 8 1 7 8 9 5 6 2 3 4 0 6 3 9 7 0 1 8 4 2 5 8 5 4 2 6 3 0 9 7 1 9 8 6 0 7 4 3 1 5 2 3 9 5 6 2 8 4 0 1 7
(14)-симметрия	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 0 5 6 3 4 9 7 8 2 3 1 0 5 4 9 8 6 7 6 7 8 4 0 9 5 1 2 3 4 8 7 9 3 6 0 2 1 5 5 9 3 8 2 7 1 6 0 4 7 4 6 1 9 0 8 3 5 2 9 6 4 2 1 8 7 5 3 0 8 0 5 6 7 2 3 4 9 1 3 5 9 7 8 1 2 0 4 6
(15)-симметрия	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9 2 5 1 7 3 8 4 0 6 4 7 1 6 9 8 3 2 5 0 3 8 6 4 2 0 1 9 7 5 5 6 0 9 3 7 4 8 2 1 7 4 9 0 8 6 5 3 1 2 2 9 8 5 0 4 7 1 6 3 1 0 4 8 6 2 9 5 3 7 8 3 7 2 5 1 0 6 9 4 6 5 3 7 1 9 2 0 4 8
(23)-симметрия	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 5 3 0 8 2 9 4 6 1 7 6 2 9 4 8 0 5 3 7 1 3 6 8 7 9 1 0 2 4 5 8 4 5 6 1 7 3 9 2 0 9 5 1 2 6 4 7 8 0 3 1 7 6 5 3 8 2 0 9 4 7 9 4 1 0 2 8 5 3 6 4 8 7 0 5 3 9 1 6 2 2 0 3 9 7 6 1 4 5 8
(25)-симметрия	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 2 9 5 8 0 1 7 3 6 4 6 8 3 7 9 2 4 5 0 1 5 7 0 2 1 3 8 9 4 6 4 3 7 5 6 0 9 2 1 8 1 0 8 9 7 4 2 6 3 5 8 5 6 4 3 7 1 0 9 2 9 4 1 0 2 6 5 8 7 3 7 2 4 6 8 9 3 1 5 0 3 6 9 1 5 8 0 4 2 7

(34)-симметрия

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	2	3	9	6	0	7	8	1	5
2	4	1	7	8	9	5	0	6	3
7	0	9	5	1	4	8	2	3	6
8	9	5	4	7	6	2	3	0	1
9	6	0	8	5	3	1	4	7	2
6	8	7	2	3	1	4	9	5	0
5	3	4	1	9	8	0	6	2	7
1	7	8	6	0	2	3	5	9	4
3	5	6	0	2	7	9	1	4	8

(35)-симметрия

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	5	7	9	2	4	0	1	6	8
6	7	3	0	5	1	8	2	9	4
2	4	1	7	8	9	3	5	0	6
8	9	0	1	6	7	2	3	4	5
7	2	5	6	1	8	9	4	3	0
9	3	6	8	7	2	4	0	5	1
1	8	4	5	0	6	7	9	2	3
4	0	8	2	9	3	5	6	1	7
5	6	9	4	3	0	1	8	7	2

(45)-симметрия

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	3	4	9	0	1	2	8	6	5
4	5	1	0	6	3	9	2	7	8
2	6	3	4	1	8	0	9	5	7
8	9	0	1	5	4	7	3	2	6
9	8	6	2	3	7	4	5	1	0
6	2	7	5	9	0	8	1	4	3
5	4	8	7	2	9	3	6	0	1
3	7	5	6	8	2	1	0	9	4
1	0	9	8	7	6	5	4	3	2

Горизонтальная (14) и вертикальная (41) симметрии являются инвариантными относительно *M*-преобразований по Ю.В. Чебракову [21], что в общем случае несправедливо для других видов обобщенных симметрий (рис. 4).

Исходный ДЛК, (12)-симметричен

0	1	2	3	4	5	6	7
7	2	4	1	3	6	0	5
4	6	1	7	0	2	5	3
5	3	6	4	1	7	2	0
1	0	7	6	5	4	3	2
2	7	5	0	6	3	1	4
6	4	3	5	2	0	7	1
3	5	0	2	7	1	4	6

КФ ДЛК, симметрия не просматривается

0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	0	4	5	7	3	6
3	5	6	0	7	1	2	4
5	6	4	7	2	0	1	3
2	3	7	6	1	4	5	0
6	4	5	2	0	3	7	1
7	0	1	5	3	6	4	2
4	7	3	1	6	2	0	5

Рис. 4. Пример неинвариантности (12)-симметрии относительно *M*-пребразований, применяемых при получении канонических форм

Некоторые обобщенные симметрии (соответствия между значениями элементов), задаваемые математически с использованием формул (10) и (11), сложно увидеть без дополнительных преобразований над исходным квадратом. Пример подобного соответствия приведен на рисунке 5 и представляет собой первую «двушку» (структуру типа «1:2»), найденную с использованием рассмотренного выше математического аппарата обобщенных симметрий.

Соответствия, задаваемые с использованием формулы (11), можно представить в виде подстановки (перестановки), которая, по сути, представляет собой табличное задание функции соответствия координат ячеек квадрата $h(z)$. Например, если $h(z) = -z + 4$, то соответствующая ей перестановка для размерности $N = 10$ имеет вид $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ или, в более компактной записи, $\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

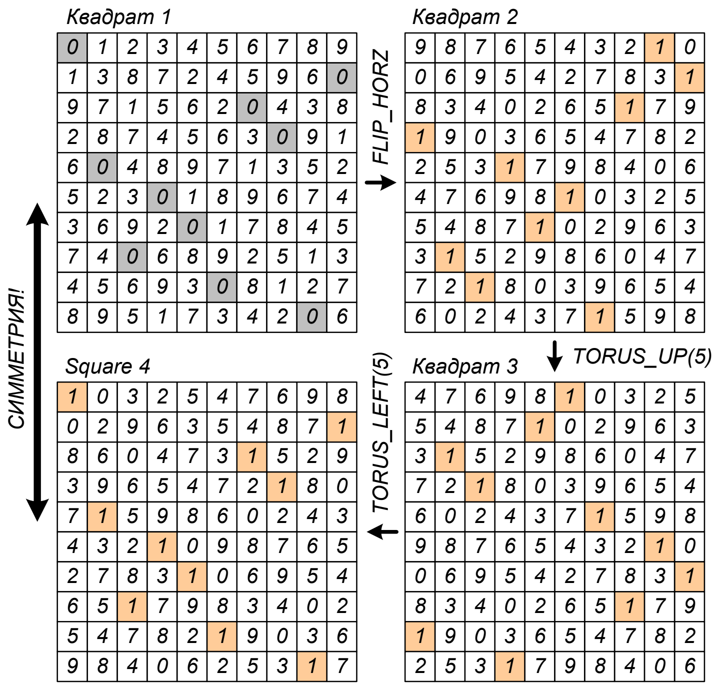

Рис. 5. Пример, поясняющий наличие симметрии у квадрата 1: симметрия на примере соответствий между значениями элементов 0 и 1 получается при горизонтальном отражении исходного квадрата (сокр. FLIP_HORZ) с последующим поворотом на торе на 5 позиций вверх (сокр. TORUS_UP(5)) и затем на 5 позиций влево (сокр. TORUS_LEFT(5))

Несложно заметить, что соответствующие перестановки имеют ряд особых свойств, схожих с рассмотренными выше свойствами обобщенных вектор-функций $\overrightarrow{X'} = \vec{F}(\vec{X})$:

$$\sigma = \sigma^{-1},\ \sigma(\sigma) = \sigma(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}(\sigma) = e,$$

где e – единичная перестановка.

Для найденных обобщенных симметрий (табл. 3) соответствующие им перестановки образованы циклами длины не более 2. Так, для приведенного выше примера перестановка σ образована следующими циклами: $\sigma = (0,4)(1,3)(2)(5,9)(6,8)(7)$. С учетом данной особенности для размерности $N = 10$ была произведена попытка отыскания всех возможных перестановок, обладающих указанным свойством, в результате чего было найдено 9 496 перестановок, часть из которых приведена ниже (в лексикографическом порядке)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8\end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 9\end{pmatrix},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_{9495} = \begin{pmatrix}9 & 8 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_{9496} = \begin{pmatrix}9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Формулам обобщенных симметрий, приведенным в таблице 3, соответствуют следующие перестановки:

$$h_1(z) = z \Leftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$
$$h_2(z) = z + 5 \Leftrightarrow \sigma_{6190} = \begin{pmatrix}5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$
$$h_3(z) = -z + 4 \Leftrightarrow \sigma_{5246} = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix},$$
$$h_4(z) = -z + 9 \Leftrightarrow \sigma_{9496} = \begin{pmatrix}9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$h_5(z) = -z + 1 \Leftrightarrow \sigma_{3384} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

С использованием полученного множества перестановок возможно отыскание обобщенных симметрий у квадратов после применения к ним M-преобразований (например, в ситуациях, схожих с приведенной на рисунке 4). Так, например, квадрат из таблицы 4, соответствующий (45)-симметрии, обладает следующими симметриями, описываемыми через номера перестановок:

(σ_1, σ_1) – тривиальная симметрия, $(\sigma_{9496}, \sigma_{3384})$ – (45)-симметрия, а его каноническая форма

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 7 & 6 & 8 & 9 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 8 & 6 & 7 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 2 & 9 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 0 & 1 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 7 & 1 & 0 & 5 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 9 & 2 & 8 & 0 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 0 & 8 & 2 & 9 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 1 & 3 & 9 & 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

обладает следующими симметриями, описываемыми через номера перестановок:

- (σ_1, σ_1) – тривиальная симметрия,
- $\left(\sigma_{3688} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 9 & 6 & 5 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_{9496} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ – (45)-симметрия после комбинации *M*-преобразований.

С использованием рассмотренного выше математического аппарата обобщенных симметрий была произведена попытка отыскания всех КФ ОДЛК и соответствующих им комбинаторных структур, обладающих одной из обобщенных симметрий. С учетом того, что для отыскания всех искомых канонических форм потребуется несколько лет на одной машине, расчет был организован в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home (число участников – более 1 000, число машин – более 2 000, достигнутая реальная производительность – 1–2 TFLOP/s). При этом в процессе формирования множества расчетных заданий (англ. Work Unit, сокр. WU) производилось получение всех возможных заполнений первых X ячеек из 100 возможных, соответствующее начальное заполнение в совокупности с вектором коэффициентов $\vec{K}$ передавалось на клиентскую машину. Значение начального числа ячеек X определяет баланс между числом расчетных заданий и числом дозаполнений и, соответственно, временем расчета одного заданий. На клиентской машине в соответствии с выбранной обобщенной симметрией производились все возможные дозаполнения, соответствующие полученному начальному заполнению, до корректных ДЛК, проверка их на наличие ОДЛК и передача найденных канонических форм ОДЛК на сервер (табл. 5). В результате выполненных расчетов были найдены несколько десятков тысяч новых КФ ОДЛК, при этом многие найденные ОДЛК, соответствующие различным обобщенным симметриям, оказались изоморфны.

Таблица 5

Формирование расчетных заданий для проекта

Обобщенная симметрия	Число начальных ячеек *X*, передаваемых на клиентскую машину в рамках одного расчетного задания	Число расчетных заданий
(12)	72	60 872
(13)	–	–
(14)	60	548 540
(15)	72	81 088
(22)	–	–
(23)	74	721 128
(24)	–	–
(25)	74	813 996
(33)	–	–
(34)	Проверены без грида в 1 поток	
(35)	80	26 303
(44)	80	19 095
(45)	80	31 501
(55)	72	268 248

В совокупности с решениями, найденными в проекте ранее с использованием рандомизированного алгоритма (формирование случайного начального заполнения, формирование дозаполнений до ДЛК, проверка на наличие ОДЛК), список КФ ОДЛК, найденных в проекте по итогам выполненного эксперимента по исследованию обобщенных симметрий, включает более 320 тысяч КФ ОДЛК, классифицированных по принадлежности к следующим комбинаторным структурам [11]: 1:1 – 313 138; 1:2 – 9 113; 1:3 – 8; 1:4 – 656; 1:6 – 24; 1:8 – 20; ромб-4 – 40; линия-5 – 18; цикл-4 – 283; рыба – 4. При этом увеличить значение характеристики ортогональности по сравнению с найденным в работе [13] не удалось. С учетом того, что в рамках проведенного вычислительного эксперимента произведена обработка всех ДЛК, обладающих хотя бы одной из обобщенных симметрий, можно сделать вывод о том, что в данном классе ОДЛК полученная ранее характеристика ортогональности 274 является максимально возможной.

Работа была частично поддержана РФФИ (гранты №№ 17-07-00317-а, 18-07-00628-а, 18-37-00094-мол-а). Авторы статьи выражают благодарность всем кранчерам, принявшим участие в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@home, а также участникам citerra и SerVal (команда Russia Team) интернет-портала BOINC.ru за помощь в организации вычислительного эксперимента, обработку части результатов и конструктивное обсуждение его деталей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006.
2. Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016). Челябинск: издательский центр ЮУрГУ, 2016. С. 155–166.
3. Заикин О.С., Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Манзюк М.О. Применение высокопроизводительных вычислений для поиска троек взаимно частично ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5. № 3. С. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304.
4. Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O. Applying high-performance computing to searching for triples of partially orthogonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies "Parallel Computing Technologies" (PCT 2016). 2016. Vol. 1576. P. 155–166.
5. Zaikin O.S., Kochemazov S.E. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project // International Journal of Open Information Technologies. 2015. Vol. 3. No. 11. P. 4–9.
6. Zaikin O.S., Kochemazov S.E. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project // Proceedings of the Second International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC: FAST 2015). Russia, Petrozavodsk, September 14–18, 2015. P. 52–63.
7. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Оценка комбинаторных характеристик диагональных латинских квадратов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2017). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2017. С. 98–100.
8. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Титов В.С. Оценка комбинаторных характеристик для пар ортогональных диагональных латинских квадратов // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов (МППОС'2017). Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. С. 104–111.
9. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Титов В.С. Оценка числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. 2018. № 1. С. 12–21.
10. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Valyaev S.Y. Using Volunteer Computing to Study Some Features of Diagonal Latin Squares // Open Engineering. 2017. Vol. 7. Iss. 1. P. 453–460. DOI: 10.1515/eng-2017-0052.
11. Ватутин Э.И., Титов В.С., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Манзюк М.О. Анализ комбинаторных структур на множестве отношения ортогональности диагональных латинских квадратов порядка 10 // Информационные технологии и математическое моделирование систем - 2017. М.: ЦИТП РАН, 2017. С. 167–170.
12. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Supercomputing Days Russia - 2018. M.: Moscow State University, 2018. P. 933–942.
13. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2016. Vol. 54C. P. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
14. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Титов В.С. Исследование свойств симметричных диагональных латинских квадратов. Работа над ошибками // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2017). Тула, 2017. С. 30–36.
15. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1940. Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. Aachen, Germany, 2017. P. 74–79.

16. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. Vol. 139. P. 43–49.
17. http://gerasim.boinc.ru
18. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Никитина Н.Н., Титов В.С. О свойствах центральной симметрии диагональных латинских квадратов // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2018. № 1 (8). С. 74–78.
19. Brayton R.K., Coppersmith D., Hoffman A.J. Self-Orthogonal Latin Squares of All Orders $n \neq 2,3,6$. // Bulletin of the American Mathematical Society. 1974. Vol. 80. No. 1. P. 116–118.
20. White H. Self-orthogonal diagonal Latin squares // http://budshaw.ca/SODLS.html
21. Чебраков Ю.В. Теория магических матриц. Санкт-Петербург, 2016. 352 с.

$n \neq 2,3,6$.

Ватутин Эдуард Игоревич
С.н.с. каф. Вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, 305040, Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: evatutin@rambler.ru

Белышев Алексей Дмитриевич
Почетный член,
Интернет-портал BOINC.ru
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: alexey-bell@yandex.ru

Заикин Олег Сергеевич
С.н.с., Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134,
ORCID 0000-0002-0145-5010
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: zaikin.icc@gmail.com

Никитина Наталья Николаевна
Н.с. лаборатории телекоммуникационных систем, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
185910, Россия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11,
ORCID 0000-0002-0538-2939
Тел.: +7-8142-76-63-12
Эл. почта: nikitina@krc.karelia.ru

Манзюк Максим Олегович
Почетный член,
Интернет-портал BOINC.ru
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: hoarfrost@rambler.ru

E.I. VATUTIN, A.D. BELYSHEV, O.S. ZAIKIN, N.N. NIKITINA, M.O. MANZUK

INVESTIGATING OF PROPERTIES OF GENERALIZED SYMMETRIES IN DIAGONAL LATIN SQUARES USING VOLUNTARY DISTRIBUTED COMPUTING

The article is devoted to the consideration of symmetry properties in diagonal Latin squares. For well-known planar (vertical and horizontal) and central (point and shifted point) symmetries, a single formal description is given that allows one to describe symmetries using a single set of formulas that bijectively map the coordinates of square cells. It is shown that in addition to the formulas describing the types of symmetry listed in the form of simple linear functions, at least 5 more formulas can also be found that also describe symmetries in a generalized form. Using them, it is possible to describe 25 additional symmetries, of which (up to transposition of the square) 15 are unique, of which 9 exist (including the trivial one). It is shown that these generalized symmetries, in contrast to the previously considered planar and central symmetries, are not invariant for M-transformations. It is shown that generalized symmetries can also be written through permutations, which solves the indicated problem of non-invariance. As a result of a computational experiment aimed at searching for generally symmetric orthogonal diagonal Latin squares, in addition to the known ones, a number of rare combinatorial structures were found. In the considered class of generalized symmetries, it was not possible to improve the record characteristic of orthogonality for the pseudo-triple of pairwise orthogonal diagonal Latin squares of order 10, equal to 274.

Keywords: *combinatorics, diagonal Latin squares, orthogonal diagonal Latin squares, generalized symmetries, volunteer computing, Gerasim@Home, BOINC.*

REFERENCES

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. *Chapman & Hall/CRC*, 2006.
2. Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O. Applying high-performance computing to searching for triples of partially orthogonal Latin squares of order 10. *Parallel computational technologies (PCT'2016). Chelyabinsk*. 2016. P. 155-166 (in Russian)
3. Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O. Applying High-Performance Computing to Searching for Triples of Partially Orthogonal Latin Squares of Order 10. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. Vol. 5. No. 3. P. 54–68. DOI: 10.14529/cmse160304 (in Russian).
4. Zaikin O.S., Vatutin E.I., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O. Applying high-performance computing to searching for triples of partially orthogonal Latin squares of order 10. *CEUR Workshop Proceedings. Proceed-*

ings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies "Parallel Computing Technologies" (PCT 2016). 2016. Vol. 1576. P. 155–166.

5. Zaikin O.S., Kochemazov S.E. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project. *International Journal of Open Information Technologies*. 2015. Vol. 3. No. 11. P. 4–9.
6. Zaikin O.S., Kochemazov S.E. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project. *Proceedings of the Second International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC: FAST 2015). Petrozavodsk, Russia*. September 14–18, 2015. P. 52–63.
7. Vatutin E.I.,, Kochemazov S.E., Zaikin O.S. Estimating of combinatorial characteristics for diagonal Latin squares. *Recognition — 2017. Kursk. SWSU*. 2017. P. 98–100 (in Russian).
8. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Titov V.S. Combinatorial characteristics estimating for pairs of orthogonal diagonal Latin squares. *Multicore processors, parallel programming, FPGA, signal processing systems. Barnaul. Altai State University*. 2017. P. 104–111 (in Russian).
9. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Valyaev S.Yu., Titov V.S. Estimating the Number of Transversals for Diagonal Latin Squares of Small Order. *Telecommunications*. 2018. No. 1. P. 12–21 (in Russian).
10. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Valyaev S.Y. Using Volunteer Computing to Study Some Features of Diagonal Latin Squares. *Open Engineering*. 2017. Vol. 7. Iss. 1. P. 453–460. DOI: 10.1515/eng-2017-0052.
11. Vatutin E.I., Titov V.S., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Manzuk M.O. An analysis of the combinatorial structures from the diagonal Latin squares of order 10 on the binary relation of orthogonality. *Information technologies and mathematical modeling of a systems. 2017*. Moscow: Center of Information Technologies in Mathematical Modeling of RAS, 2017. P. 167–170 (in Russian).
12. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing. *Supercomputing Days Russia 2018. Moscow. Moscow State University*. 2018. P. 933–942.
13. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 54C. P. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.
14. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Titov V.S. Investigation of the properties of symmetric diagonal Latin squares. Working on errors. *Intellectual and Information Systems (Intellect – 2017). Tula*. 2017. P. 30–36 (in Russian).
15. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares. *CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1940. Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. Aachen, Germany*. 2017. P. 74–79.
16. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares. *Lecture notes in pure and applied mathematics*. 1992. Vol. 139. P. 43–49.
17. http://gerasim.boinc.ru
18. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N., Titov V.S. Properties of central symmetry for diagonal Latin squares. *High-performance computing systems and technologies*. 2018. No. 1 (8). P. 74–78 (in Russian).
19. Brayton R.K., Coppersmith D., Hoffman A.J. Self-Orthogonal Latin Squares of All Orders $n \neq 2,3,6$. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1974. Vol. 80. No. 1. P. 116–118.
20. White H. Self-orthogonal diagonal Latin squares // http://budshaw.ca/SODLS.html
21. Chebrakov Yu.V. Theory of magic matrices. *Saint-Petersburg*. 2016. 352 p. (in Russian).

Eduard I. Vatutin
Senior researcher, Department of Computer Science, Southwest State University,
94, 50 let Oktyabrya str., Kursk, Russia, 305040,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Phone: +7-4712-22-26-65
E-mail: evatutin@rambler.ru

Alexey D. Belyshev
Associate member,
Internet-portal BOINC.ru
Phone: +7-4712-22-26-65
E-mail: alexey-bell@yandex.ru

Oleg S. Zaikin
Senior researcher,
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov str., Irkutsk, Russia, 664033,
ORCID 0000-0002-0145-5010
Phone: +7-4712-22-26-65
E-mail: zaikin.icc@gmail.com

Natalia N. Nikitina
Research Associate in the Laboratory for Telecommunications Systems Institute of Applied Mathematical Research,
Karelian Research Center of the RAS
11, Pushkinskaya str., Petrozavodsk, Karelia, 185910, Russia
ORCID 0000-0002-0538-2939
Phone: +7-8142-76-63-12
E-mail: nikitina@krc.karelia.ru

Maxim O. Manzuk
Associate member,
Internet-portal BOINC.ru
Phone: +7-4712-22-26-65
E-mail: hoarfrost@rambler.ru