

Метод Гергели

Источник: Ervin Gergely. A simple method for constructing doubly diagonalized Latin squares // Journal of combinatorial theory (A). Vol. 16. 1974. pp. 266–272.

Применение: получение ДЛК B порядка $2k$ или $2k + 1$ из образующего ЛК A порядка k .

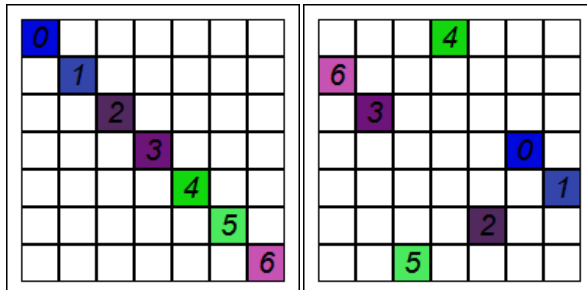
Исходные данные: ЛК A порядка k с главной диагональю, являющейся трансверсалью, и трансверсаль T в ЛК A , не пересекающая главную и побочную диагонали. Для примера возьмем следующий ЛК порядка $k = 7$ и следующую трансверсаль:

0	2	3	4	1	6	5
6	1	4	5	0	2	3
5	3	2	0	6	1	4
4	6	1	3	5	0	2
2	5	0	6	4	3	1
3	4	6	1	2	5	0
1	0	5	2	3	4	6

			4			
6						
	3					
					0	
						1
			2			
		5				

Формируемый ДЛК B четного порядка $2k$ представляется в виде $B = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_4 & D_3 \end{bmatrix}$, где D_i – ЛК специального вида, получаемые из заданных ЛК A и трансверсали T . В случае формирования ДЛК нечетного порядка $2k + 1$ между квадратами D_i вставляются пустая строка и пустой столбец.

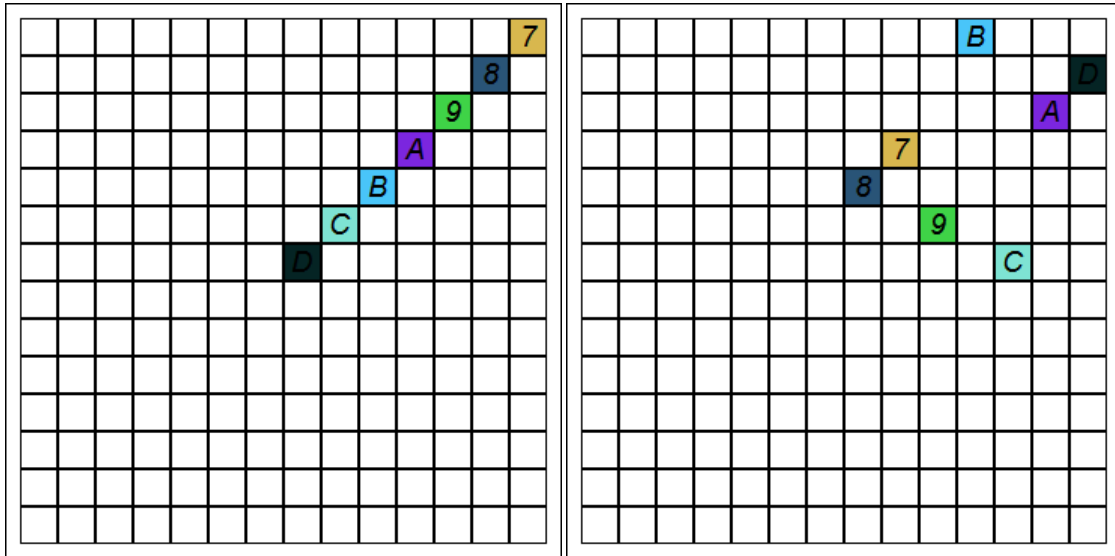
3. Квадрат D_3 формируется из квадрата D_1 , для замены значений используется биективная подстановка P_1 : $D_3[x][y] := P_1(D_1[x][y])$. Значения подстановки P_1 получаются путем выписывания значений главной диагонали квадрата D_1 справа налево (первая строка) и значений трансверсали слева направо (вторая строка).



$$P_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0	2	3	4	1	6	5	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	D	B	A	9	C	7	8
						X	1	2	4	5	0	6	3
					X		6	0	5	3	1	2	4
				X			3	4	2	1	6	0	5
			X				5	6	0	4	3	1	2
		X					2	3	1	6	5	4	0
	X						4	5	6	0	2	3	1
X							0	1	3	2	4	5	6

4. Квадрат D_4 формируется из квадрата D_2 , для замены значений используется биективная подстановка $P_2: D_4[x][y] := P_2(D_2[x][y])$. Значения подстановки P_2 получаются путем выписывания значений побочной диагонали квадрата D_2 справа налево (первая строка) и значений отраженной по горизонтали трансверсали T в нем слева направо (вторая строка).



$$P_2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & A & B & C & D \\ 8 & 7 & 9 & B & C & A & D \end{pmatrix}$$

0	2	3	4	1	6	5	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	D	B	A	9	C	7	8
A	D	7	C	B	9	8	1	2	4	5	0	6	3
B	9	8	A	C	7	D	6	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	9	B	A	3	4	2	1	6	0	5
9	8	A	B	7	D	C	5	6	0	4	3	1	2
7	B	C	D	8	A	9	2	3	1	6	5	4	0
8	A	9	7	D	C	B	4	5	6	0	2	3	1
D	C	B	9	A	8	7	0	1	3	2	4	5	6

Далее необходимо ликвидировать дублирование значений.

5. Переставим значения побочной диагонали квадрата D_4 на ячейки трансверсали в квадрате D_1 .

0	2	3	B	1	6	5	C	D	8	B	A	9	7
D	1	4	5	0	2	3	A	9	7	C	B	8	D
5	A	2	0	6	1	4	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	7	2	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	8	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	9	5	0	7	C	9	8	D	B	A
1	0	C	2	3	4	6	D	B	A	9	C	7	8
A	D	7	C	B	9	8	1	2	4	5	0	6	3
B	9	8	A	C	7	D	6	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	9	B	A	3	4	2	1	6	0	5
9	8	A	B	7	D	C	5	6	0	4	3	1	2
7	B	C	D	8	A	9	2	3	1	6	5	4	0
8	A	9	7	D	C	B	4	5	6	0	2	3	1
D	C	B	9	A	8	7	0	1	3	2	4	5	6

6. Поменяем местами побочную диагональ квадрата D_4 и главную диагональ квадрата D_3 .

0	2	3	B	1	6	5	C	D	8	B	A	9	7
D	1	4	5	0	2	3	A	9	7	C	B	8	D
5	A	2	0	6	1	4	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	7	2	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	8	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	9	5	0	7	C	9	8	D	B	A
1	0	C	2	3	4	6	D	B	A	9	C	7	8
A	D	7	C	B	9	1	8	2	4	5	0	6	3
B	9	8	A	C	0	D	6	7	5	3	1	2	4
C	7	D	8	2	B	A	3	4	9	1	6	0	5
9	8	A	4	7	D	C	5	6	0	B	3	1	2
7	B	5	D	8	A	9	2	3	1	6	C	4	0
8	3	9	7	D	C	B	4	5	6	0	2	A	1
6	C	B	9	A	8	7	0	1	3	2	4	5	D

7. Переставим значения побочной диагонали квадрата D_4 на ячейки трансверсали в квадрате D_2 . В результате оказывается сформирован корректный ДЛК.

0	2	3	B	1	6	5	C	D	8	4	A	9	7
D	1	4	5	0	2	3	A	9	7	C	B	8	6
5	A	2	0	6	1	4	B	8	D	7	9	3	C
4	6	1	3	5	7	2	9	0	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	8	1	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	9	5	0	7	C	2	8	D	B	A
1	0	C	2	3	4	6	D	B	A	9	5	7	8
A	D	7	C	B	9	1	8	2	4	5	0	6	3
B	9	8	A	C	0	D	6	7	5	3	1	2	4
C	7	D	8	2	B	A	3	4	9	1	6	0	5
9	8	A	4	7	D	C	5	6	0	B	3	1	2
7	B	5	D	8	A	9	2	3	1	6	C	4	0
8	3	9	7	D	C	B	4	5	6	0	2	A	1
6	C	B	9	A	8	7	0	1	3	2	4	5	D

Формирование ДЛК B нечетного порядка $2k+1$

1. $D_1 := A$

0	2	3	4	1	6	5														
6	1	4	5	0	2	3														
5	3	2	0	6	1	4														
4	6	1	3	5	0	2														
2	5	0	6	4	3	1														
3	4	6	1	2	5	0														
1	0	5	2	3	4	6														

2. Квадрат D_2 получается из квадрата D_1 путем его отражения по горизонтали и увеличения значений элементов на k .

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7							
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D							
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C							
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B							
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9							
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A							
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8							
							E														
							E		E												
							E			E											
							E				E										
							E					E									
							E						E								
							E							E							
							E								E						
							E									E					
							E										E				
							E											E			
							E												E		

3. Квадрат D_3 формируется из квадрата D_1 , для замены значений используется биективная подстановка P_1 : $D_3[x][y] := P_1(D_1[x][y])$. Значения подстановки P_1 получаются путем выписывания значений главной диагонали квадрата D_1 справа налево (первая строка) и значений трансверсали слева направо (вторая строка).

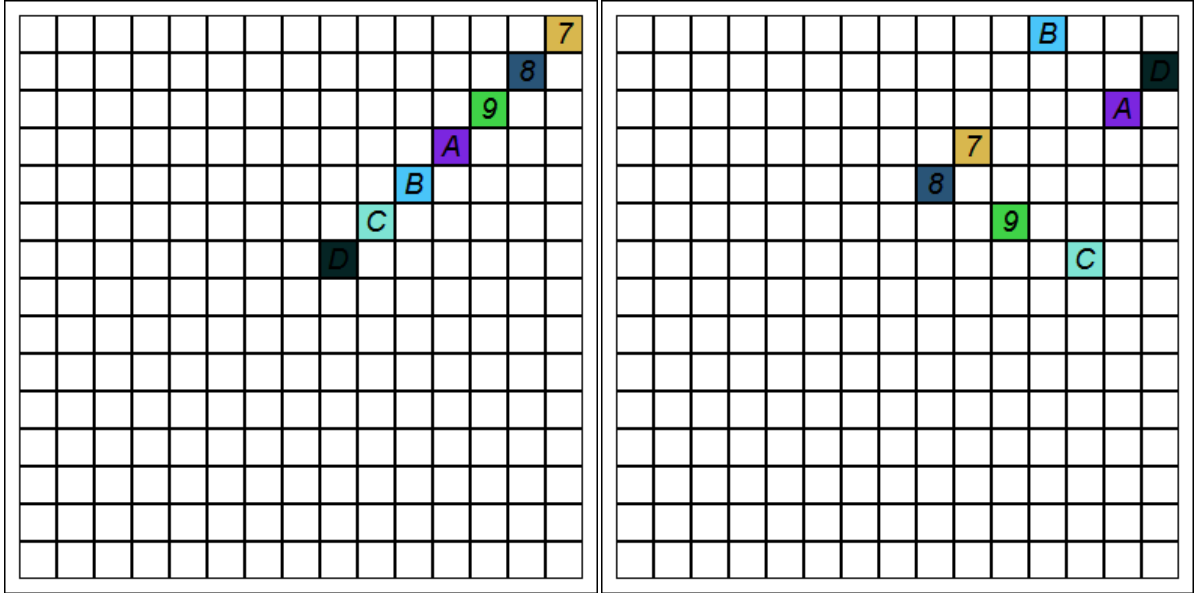
0							
	1						
		2					
			3				
				4			
					5		
						6	

		4					
6							
	3						
					0		
						1	
							2
		5					

$$P_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8
							E	E	E	E	E	E	E	E
						E		1	2	4	5	0	6	3
					E			6	0	5	3	1	2	4
				E				3	4	2	1	6	0	5
		E						5	6	0	4	3	1	2
	E							2	3	1	6	5	4	0
		E						4	5	6	0	2	3	1
E								0	1	3	2	4	5	6

4. Квадрат D_4 формируется из квадрата D_2 , для замены значений используется биективная подстановка P_2 : $D_4[x][y] := P_2(D_2[x][y])$. Значения подстановки P_2 получаются путем выписывания значений побочной диагонали квадрата D_2 справа налево (первая строка) и значений отраженной по горизонтали трансверсали T в нем слева направо (вторая строка).



$$P_2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & A & B & C & D \\ 8 & 7 & 9 & B & C & A & D \end{pmatrix}$$

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
A	D	7	C	B	9	8	E	1	2	4	5	0	6	3
B	9	8	A	C	7	D	E	6	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	9	B	A	E	3	4	2	1	6	0	5
9	8	A	B	7	D	C	E	5	6	0	4	3	1	2
7	B	C	D	8	A	9	E	2	3	1	6	5	4	0
8	A	9	7	D	C	B	E	4	5	6	0	2	3	1
D	C	B	9	A	8	7	E	0	1	3	2	4	5	6

Далее необходимо ликвидировать дублирование значений и заполнить пустые ячейки ДЛК B .

5. Переставим значения трансверсали T в квадрате D_3 вверх в незаполненные ячейки строки в центре длк B .

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8
E	E	E	E	E	E	E	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	8		1	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	7	D		E	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	9	B	A		3	E	2	1	6	0	5
9	8	A	B	7	D	C		5	6	0	4	3	E	2
7	B	C	D	8	A	9		2	3	1	6	5	4	E
8	A	9	7	D	C	B		4	5	6	0	E	3	1
D	C	B	9	A	8	7		0	1	E	2	4	5	6

6. Переставим значения побочной диагонали квадрата D_4 вверх в незаполненные ячейки строки в центре длк B .

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	E		1	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	E	D		E	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	E	B	A		3	E	2	1	6	0	5
9	8	A	E	7	D	C		5	6	0	4	3	E	2
7	B	E	D	8	A	9		2	3	1	6	5	4	E
8	E	9	7	D	C	B		4	5	6	0	E	3	1
E	C	B	9	A	8	7		0	1	E	2	4	5	6

7. Переставим значения трансверсали в квадрате D_3 влево в незаполненные ячейки столбца в центре длк B .

0	2	3	4	1	6	5	E	C	D	8	B	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	E	A	9	7	C	B	8	D
5	3	2	0	6	1	4	E	B	8	D	7	9	A	C
4	6	1	3	5	0	2	E	9	7	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	E	8	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	E	7	C	9	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	E	D	B	A	9	C	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	E	5	1	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	E	D	6	E	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	E	B	A	4	3	E	2	1	6	0	5
9	8	A	E	7	D	C	1	5	6	0	4	3	E	2
7	B	E	D	8	A	9	0	2	3	1	6	5	4	E
8	E	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	3	1
E	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	6

8. Переставим значения трансверсали в квадрате D_2 влево в незаполненные ячейки столбца в центре длк B .

0	2	3	4	1	6	5	B	C	D	8	E	A	9	7
6	1	4	5	0	2	3	D	A	9	7	C	B	8	E
5	3	2	0	6	1	4	A	B	8	D	7	9	E	C
4	6	1	3	5	0	2	7	9	E	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	1	8	E	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	2	5	0	9	7	C	E	8	D	B	A
1	0	5	2	3	4	6	C	D	B	A	9	E	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	E	5	1	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	E	D	6	E	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	E	B	A	4	3	E	2	1	6	0	5
9	8	A	E	7	D	C	1	5	6	0	4	3	E	2
7	B	E	D	8	A	9	0	2	3	1	6	5	4	E
8	E	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	3	1
E	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	6

9. Произведем установку значения $2k$ в ячейки трансверсали T в квадратах D_1 и D_3 .

0	2	3	E	1	6	5	B	C	D	8	X	A	9	7
E	1	4	5	0	2	3	D	A	9	7	C	B	8	X
5	E	2	0	6	1	4	A	B	8	D	7	9	X	C
4	6	1	3	5	E	2	7	9	X	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	E	8	X	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	E	5	0	9	7	C	X	8	D	B	A
1	0	E	2	3	4	6	C	D	B	A	9	X	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	8	5	1	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	7	D	6	E	0	5	3	1	2	4
C	7	D	8	9	B	A	4	3	E	2	1	6	0	5
9	8	A	B	7	D	C	1	5	6	0	4	3	E	2
7	B	C	D	8	A	9	0	2	3	1	6	5	4	E
8	A	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	3	1
D	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	6

10. Поменяем местами побочную диагональ квадрата D_4 и главную диагональ квадрата D_3 .

0	2	3	E	1	6	5	B	C	D	8	4	A	9	7
E	1	4	5	0	2	3	D	A	9	7	C	B	8	6
5	E	2	0	6	1	4	A	B	8	D	7	9	3	C
4	6	1	3	5	E	2	7	9	0	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	E	8	1	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	E	5	0	9	7	C	2	8	D	B	A
1	0	E	2	3	4	6	C	D	B	A	9	5	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	1	5	8	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	0	D	6	E	7	5	3	1	2	4
C	7	D	8	2	B	A	4	3	E	9	1	6	0	5
9	8	A	4	7	D	C	1	5	6	0	B	3	E	2
7	B	5	D	8	A	9	0	2	3	1	6	C	4	E
8	3	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	A	1
6	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	D

11. Произведем установку значений побочной диагонали в квадрате D_4 на место трансверсали в квадрате D_2 .

0	2	3	E	1	6	5	B	C	D	8	4	A	9	7
E	1	4	5	0	2	3	D	A	9	7	C	B	8	6
5	E	2	0	6	1	4	A	B	8	D	7	9	3	C
4	6	1	3	5	E	2	7	9	0	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	E	8	1	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	E	5	0	9	7	C	2	8	D	B	A
1	0	E	2	3	4	6	C	D	B	A	9	5	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	1	5	8	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	0	D	6	E	7	5	3	1	2	4
C	7	D	8	2	B	A	4	3	E	9	1	6	0	5
9	8	A	4	7	D	C	1	5	6	0	B	3	E	2
7	B	5	D	8	A	9	0	2	3	1	6	C	4	E
8	3	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	A	1
6	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	D

12. Произведем установку значения $2k$ в центральный элемент ДЛК B . В результате оказывается сформирован корректный ДЛК.

0	2	3	E	1	6	5	B	C	D	8	4	A	9	7
E	1	4	5	0	2	3	D	A	9	7	C	B	8	6
5	E	2	0	6	1	4	A	B	8	D	7	9	3	C
4	6	1	3	5	E	2	7	9	0	C	A	8	D	B
2	5	0	6	4	3	E	8	1	A	B	D	7	C	9
3	4	6	1	E	5	0	9	7	C	2	8	D	B	A
1	0	E	2	3	4	6	C	D	B	A	9	5	7	8
D	A	C	B	9	7	8	E	6	4	3	5	2	1	0
A	D	7	C	B	9	1	5	8	2	4	E	0	6	3
B	9	8	A	C	0	D	6	E	7	5	3	1	2	4
C	7	D	8	2	B	A	4	3	E	9	1	6	0	5
9	8	A	4	7	D	C	1	5	6	0	B	3	E	2
7	B	5	D	8	A	9	0	2	3	1	6	C	4	E
8	3	9	7	D	C	B	2	4	5	6	0	E	A	1
6	C	B	9	A	8	7	3	0	1	E	2	4	5	D

Замечание. Для рисования иллюстраций была использована программа LsEdit (http://evatutin.narod.ru/evatutin_LsEdit.7z). Текстом зеленого цвета на белом фоне в ней обозначаются ячейки, в которые можно установить единственное значение без нарушения ограничений ДЛК ($|S_{ij}| = 1$). Красными крестами на белом фоне обозначаются ячейки, в которые невозможно установить ни одно значение без нарушения ограничений ДЛК ($|S_{ij}| = 0$). Красным цветом выделяются ячейки, в которых происходит нарушение ограничений ДЛК (дублирование значений в строке, столбце или на одной из диагоналей ДЛК).