УДК 681.3

В.В. Мальков, Э.И. Ватутин
evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет, Курск

ПОСТРОЕНИЕ ПСЕВДОТРОЕК ДЛК ПОРЯДКА 10 С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА

В работе приведена классификация псевдотроек из частично ортогональных латинских квадратов, результаты обзора литературы по построению псевдотроек каждого из трех типов и результаты вычислительного эксперимента по построению псевдотройки типа 3 с характеристикой ортогональности 229 из 300 с использованием метода случайного перебора.

Одной из известных открытых задач в области исследования латинских и диагональных латинских квадратов (сокр. ЛК и ДЛК соответственно) является задача о существовании тройки взаимно-ортогональных ЛК/ДЛК (сокр. ВОЛК/ВОДЛК, англ. MOLS/MODLS) порядка 10 [1]. Ее решению посвящено большое количество научных работ, однако на данный момент искомая тройка не найдена ни сама по себе, ни в составе более сложных комбинаторных структур. В то же самое время теоретически не доказана невозможность ее построения. При этом на практике известен ряд публикаций, в которых описаны псевдотройки, в составе которых квадраты частично ортогональны. Псевдотройки могут быть разделены на следующие типы, условно именуемые как «тип 1», «тип 2» и «тип 3», представленные на рис. 1.

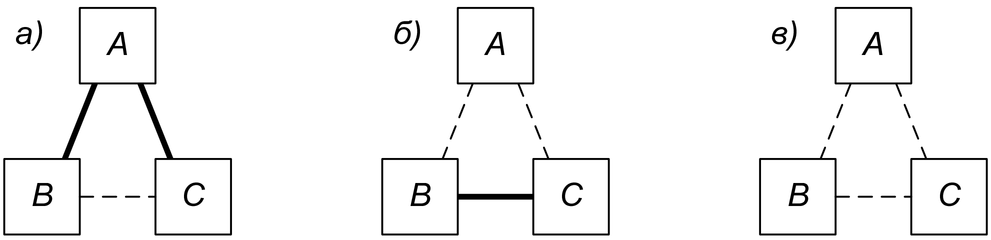

Рис. 1. Типы псевдотроек ВОЛК/ВОДЛК. Сплошными жирными линиями обозначена полная ортогональность пары ЛК/ДЛК, штриховкой – частичная

Частичная ортогональность пары квадратов A и B означает, что часть ячеек образует уникальные упорядоченные пары $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$ в соответствии с общепринятым определением ортогональности, а оставшиеся пары дублируются. Число уникальных упорядоченных пар значений обозначается как $h\left(A, B\right)$ и называется характеристикой ортогональности пары квадратов (сокр. ХО). Несложно показать, что $N \le h\left(A, B\right) \le N^2$, причем $h\left(A, B\right) = N^2$ в случае наличия полной ортогональности и $h(A,B)<N^2$ в случае частичной. Характеристикой ортогональности псевдотройки будем называть величину $h(A,B,C)=h(A,B)+h(A,C)+h(B,C)$.

В литературе наибольшее внимание уделено псевдотройками типа 1. В работе [2] приведена псевдотройка из ДЛК с характеристикой ортогональности $h_{\max}(A,B,C)=274$, являющейся рекордным значением с момента построения указанной псевдотройки в 2016 году. Образующий ее ДЛК A обладает плоскостной симметрией, среди всех других ДЛК с аналогичным типом симметрии б**о**льших значений ХО не существует. Аналогичное утверждение касается и других типов симметрий для ДЛК данной размерности (частично центрально-симметричных, обобщенно-симметричных, частично обобщенно-симметричных, частично дважды симметричных). Минимальным известным значением является $h_{\min}(A,B,C)=212$, им обладает абсолютное большинство псевдотроек типа 1 (комбинаторных структур типа «линия-3» [3]), получаемых путем анализа случайных ДЛК на ОДЛК.

В статье [4] приведен пример псевдотройки из ДЛК типа 2. В качестве пары полностью ортогональных ДЛК авторами была взята одна из пар, найденных в проекте SAT@Home с использованием SAT-подхода. Далее к ней методом случайного перебора была произведена попытка достройки третьего случайного ДЛК, в результате чуть более чем 7 часов расчета на вычислительном кластере «Академик В.М. Матросов» была получена псевдотройка с $h(A,B,C)=248$. В статье [5] путем достройки третьего ДЛК к паре известных ОДЛК с использованием SAT-подхода была найдена псевдотройка с $h(A,B,C)=254$ (в указанных статьях расчет ХО производился по-другому, в данной публикации значение $h(A,B,C)$ пересчитано для приведенных в статьях псевдотроек с использованием рассмотренной выше методики).

Псевдотроек из ДЛК типа 3 обзор литературы не выявил.

Выше приведены известные примеры псевдотроек из ДЛК. Известным рекордом для псевдотроек типа 1 из ЛК является значение $h(A,B,C)=291$, соответствующая псевдотройка приведена в [6].

В статье [7] приведен пример нескольких псевдотроек типа 3 из ЛК с $h(A,B,C)=294$ (в рамках данной статьи они именуются «псевдотройками с дыркой», которая образована значениями элементов $a_{8,9}$ и $a_{9,9}$ образующих псевдотройку ЛК).

В данной статье была предпринята попытка построения псевдотроек типа 3 из ДЛК. Для этого была разработана однопоточная программная реализация, в рамках которой производилась итеративная генерация трех случайных ДЛК, расчет ХО образуемой ими псевдотройки типа 3 и сохранение наиболее интересных решений. Она была запущена в 4 потока на процессоре AMD Ryzen 7 4800H и в 2 потока на процессоре Intel Xeon 1230 v1. В результате суток расчета было найдено 60 983 псевдотройки с $h(A, B, C) > 200$ и 6278 псевдотроек с $h(A, B, C) > 220$. Максимальным найденным в ходе вычислительного эксперимента значением является $h(A, B, C) = 229$, ему соответствуют 4 псевдотройки, одна из которых приведена ниже (см. рис.).

7 3 1 8 4 2 5 9 0 6	2 9 4 5 7 3 1 8 0 6	4 9 2 8 1 6 5 7 3 0
0 6 5 3 1 8 9 7 2 4	1 4 2 7 0 8 6 3 5 9	8 7 4 0 3 1 2 5 6 9
4 2 8 0 7 6 1 3 9 5	5 7 3 2 6 4 0 9 1 8	9 4 6 1 8 3 7 2 0 5
8 4 6 9 2 7 0 5 1 3	9 2 1 0 4 7 3 6 8 5	7 6 9 5 0 2 4 1 8 3
9 8 7 1 5 4 3 2 6 0	3 6 5 8 9 1 4 0 2 7	0 8 1 6 2 7 3 9 5 4
2 0 3 6 8 1 7 4 5 9	7 0 8 1 2 6 5 4 9 3	3 2 0 4 5 9 6 8 7 1
3 9 2 5 6 0 4 1 8 7	6 1 9 4 5 2 8 7 3 0	5 1 3 9 7 8 0 6 4 2
6 1 9 7 3 5 2 0 4 8	8 3 7 9 1 0 2 5 6 4	2 5 8 7 4 0 1 3 9 6
5 7 4 2 0 9 6 8 3 1	4 8 0 6 3 5 9 1 7 2	6 3 5 2 9 4 8 0 1 7
1 5 0 4 9 3 8 6 7 2	0 5 6 3 8 9 7 2 4 1	1 0 7 3 6 5 9 4 2 8

Рис. Одна из четырех найденных псевдотроек типа 3 с $h(A, B, C) = 229$

В перспективе дальнейших исследований необходимо поднять темп формирования ДЛК (и, соответственно, – псевдотроек) и осуществить данный эксперимент на параллельной вычислительной системе (вычислительном кластере, суперкомпьютере или грид-системе).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.

2. Zaikin O., Zhuravlev A., Kochemazov S., Vatutin E. On the Construction of Triples of Diagonal Latin Squares of Order 10 // Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 54C. 2016. pp. 307–312. DOI: 10.1016/j.endm.2016.09.053.

3. Vatutin E.I., Titov V.S., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Manzuk M.O., Nikitina N.N. Orthogonality-based classification of diagonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2267. Proceedings of the VIII International Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education" (GRID 2018). Dubna, JINR, 2018. pp. 282–287.

4. Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Белоречев И.Д. Поиск пар ортогональных диагональных латинских квадратов порядка 10 в проекте добровольных распределенных вычислений SAT@home // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015). Челябинск: изд-во «Издательский центр ЮУрГУ», 2015. С. 157–165.

5. Zaikin O., Kochemazov S. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project // International Journal of Open Information Technologies. Vol. 3, No. 11. 2015. pp. 4–9.

6. Egan J., Wanless I.M. Enumeration of MOLS of small order // Preprint: Arxiv: 1406.3681 [math.CO]. DOI: 10.48550/arXiv.1406.3681, 2014. Published: Mathematics of Computation, Vol. 85, 2016. pp. 799–824.

7. Brouwer A.E. Four MOLS of order 10 with a hole of order 2 // Journal of Statistical Planning and Inference. Vol. 10. 1984. pp. 203–205.