

Ватугин Э.И.¹, Бельшев А.Д.², Никитина Н.Н.³, Манзюк М.О.²

¹ Юго-Западный государственный университет

² Интернет-портал VOINC.ru

³ Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ X-ОБРАЗНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЗАПОЛНЕНИЙ И ESODLS CMS СХЕМ ДЛЯ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ КЛАССОВ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Ключевые слова: перечислительная комбинаторика, диагональные латинские квадраты, главные классы, схемы отображения ячеек, целочисленные последовательности, OEIS, VOINC.

Аннотация. В статье введено понятие X-образных диагональных заполнений в диагональных латинских квадратах (ДЛК), произведено их перечисление, построение классов изоморфизма и показана связь с задачами на базе карточных деков. На их основе предложен способ генерации сильно нормализованных канонических форм ДЛК с использованием ограниченного множества ESODLS CMS схем, позволяющий сократить необходимые вычислительные затраты на 3–4 порядка по сравнению с программной реализацией на базе полного перебора ДЛК. С использованием разработанных программных реализаций и проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home на платформе VOINC осуществлен подсчет числа главных классов ДЛК порядка 9, число которых ранее было неизвестно и составило 3 292 326 155 394.

Введение

Латинские квадраты (ЛК) представляют собой известный класс комбинаторных объектов, исследованию которых посвящен достаточно большой объем научной литературы [1]. Одним из специальных типов ЛК являются диагональные латинские квадраты (ДЛК), у которых в дополнение к требованию уникальности значений в строках и столбцах добавляются аналогичные требования для главной и побочной диагоналей. Латинские квадраты могут быть разбиты на различные классы эквивалентности благодаря тому, что существует ряд эквивалентных преобразований (нормализация, комбинации M-преобразований [2, 3]), переводящих различные ДЛК друг в друга. В ряде задач, связанных с исследованием ДЛК (перечисление, поиск квадратов с экстремальным значением выбранной числовой характеристики, построение спектров и пр.), достаточно проанализировать свойства лишь одного квадрата из соответствующего класса изоморфизма, что, как правило, существенно (на 3–4 порядка) снижает необходимые вычислительные затраты. В случае, если вычислительные затраты по-прежнему оказываются высоки для выполнения расчета на одной машине, допускается разбиение соответствующих процедур на несвязанные по данным и управлению части (подзадачи) с последующим их выполнением в параллельном режиме с использованием добровольных распределенных вычислений. Наиболее эффективной и широко используемой в настоящее время в данном плане является платформа VOINC [4]: с ее использованием удастся снизить необходимые затраты времени еще приблизительно на 2 порядка. В данной статье приведены теоретические основы и базирующиеся на них результаты вычислительных экспериментов, направленных на построение генератора канонических форм (сокр. КФ) главных классов ДЛК с целью их перечисления и организации ряда связанных с ними экспериментов в перспективе.

Основные понятия и определения

Латинским квадратом порядка N будем именовать квадратную таблицу $A = [a_{ij}]$ из $N \times N$ ячеек, $i = \overline{0, N-1}, j = \overline{0, N-1}$, заполненную значениями алфавита $U = \{0, 1, \dots, N-1\}$ таким образом, что в строках и столбцах используемые значения не повторяются (для ЛК), а также не повторяются на главной и побочной диагоналях (для ДЛК). Путем перенумерации значений в ячейках ДЛК можно получить класс изоформизма из ДЛК мощностью $N!$ в соответствии с числом перестановок мощности N , который будем называть *классом изоформизма денормализованных ДЛК*. В его составе можно выделить в точности один ДЛК, у которого первая строка упорядочена по возрастанию, его будем называть *нормализованным по первой строке*. Аналогичным образом можно выбрать в точности по одному ДЛК, нормализованному по любой из строк, любому из столбцов или любой из диагоналей. Наиболее часто применяются нормализация по первой строке и по главной диагонали, являющиеся эквивалентными способами фиксации одного из ДЛК в рамках класса изоформизма денормализованных ДЛК и позволяющие снизить мощность перебора в $N!$ раз.

Путем применения комбинаций М-преобразований с последующей нормализацией можно получить другой класс изоформизма, именуемый *главным классом*. Лексикографически минимальное строковое представление ДЛК, следуя [3], будем называть *канонической формой* (КФ). Каждому главному классу соответствует в точности одна КФ.

Схемой соответствия ячеек (англ. Cells Mapping Schema, сокр. CMS) в соответствии с [5] будем называть перестановку p ячеек ДЛК. Схему, соответствующую единичной перестановке ячеек ($p[i] = i$), будем называть *тривиальной*. Путем применения всех возможных комбинаций М-преобразований к тривиальной CMS можно получить множество схем, именуемых *ESODLS CMS* (название взято от одноименного типа ортогональных ДЛК (ОДЛК) особого типа [6], в которых один из квадратов ортогональной пары получается из другого путем применения к нему соответствующей ESODLS CMS, трансверсали [14] и базирующийся на них метод Эйлера-Паркера [7] при этом не используются).

Понятие X-образных диагональных заполнений

X-образным диагональным заполнением будем называть частично заполненный значениями ДЛК, в котором заполнены только диагонали, причем использованные для этого значения удовлетворяют определению ДЛК (не дублируются в строках, столбцах и на диагоналях). *X-образным диагональным заполнением с фиксированной диагональю* или *нормализованным X-образным диагональным заполнением* будем называть такое заполнение, в котором главная диагональ зафиксирована каким-либо образом (например, упорядочена по возрастанию). Несложно показать, что, аналогично нормализованным и денормализованным ДЛК, число заполнений с фиксированной диагональю в $N!$ раз меньше числа заполнений общего вида, а из любого произвольного заполнения можно получить фиксировано-диагональное (диагонально-нормализованное). Примеры X-образных заполнений указанного вида приведены на рис. 1.

а)					
5					0
	0			1	
		4	3		
		5	2		
	2			3	
4					1

б)					
0					1
	1			5	
		2	4		
		0	3		
	3			4	
2					5

Рис. 1. Одно из X-образных диагональных заполнений ДЛК порядка 6 (а) и соответствующее ему нормализованное заполнение (б)

Произведем подсчет числа нормализованных X-образных диагональных заполнений в зависимости от порядка ДЛК N . Для размерностей $N \leq 13$ эта процедура не требует существенных вычислительных затрат, для каждой из размерностей $N = 14$ и $N = 15$ на подсчет потребовалось 1,5 часа работы процессора Core i7 4770 в 1 поток, в результате чего было получен следующий числовой ряд:

1, 0, 0, 4, 4, 80, 80, 4752, 4752, 440192, 440192, 59245120, 59245120, 10930514688,
10930514688.

Данный числовой ряд ранее не был известен (по крайней мере в приведенном выше представлении), он прошел апробацию и был добавлен в Онлайн-энциклопедию целочисленных последовательностей (сокр. OEIS) [8] под номером A337302¹. Умножая его значения на $N!$, можно получить числовой ряд, соответствующий количеству X-образных диагональных заполнений общего вида:

1, 0, 0, 96, 480, 57600, 403200, 191600640, 1724405760, 1597368729600, 17571056025600,
28378507272192000, 368920594538496000, 952903592436341145600,
14293553886545117184000.

Полученный числовой ряд также не был представлен в OEIS, он прошел апробацию и был добавлен под номером A337303. Как уже было отмечено выше, $A337302(N) \cdot N! = A337303(N)$.

Примеры всех возможных нормализованных диагональных заполнений для ДЛК порядка 4 приведены на рис. 2.

0			1
	1	0	
	3	2	
2			3

0			1
	1	3	
	0	2	
2			3

0			2
	1	0	
	3	2	
1			3

0			2
	1	3	
	0	2	
1			3

Рис. 2. Все возможные нормализованные диагональные заполнения для ДЛК порядка 4 с упорядоченной по возрастанию главной диагонали ($A337302(4) = 4$).

Несложно заметить, что полученный числовой ряд A337302 образован парными значениями за исключением самого первого, откуда следуют эмпирическое наблюдение: $A337302(2t) = A337302(2t+1)$ для $t > 0$. Покажем теоретически, что данное соотношение справедливо для всех $t \geq 0$ (при условии что $A337302(0) = A337302(1) = 1$). Рассмотрим ДЛК порядка $N = 2t$. В нем главная диагональ фиксирована и для определенности заполнена значениями $0, 1, \dots, 2t-1$ (всего $2t$ значений). Побочная диагональ заполняется значениями из множества $U_1 = \{0, 1, \dots, 2t-1\}$ мощностью $|U_1| = 2t$ всеми возможными способами, причем для каждого из $N = 2t$ элементов побочной

¹ <https://oeis.org/A337302>

диагонали запрещено использовать ровно два значения из U_1 : одно из них уже использовано в строке на главной диагонали, второе – в столбце на главной диагонали.

Теперь рассмотрим случай размерности $N = 2t + 1$. В нем главная диагональ заполнена значениями $0, 1, \dots, 2t$ (всего $2t + 1$ значений), а в побочной диагонали зафиксирован единственный (центральный) элемент, в котором диагонали пересекаются в центре квадрата. Заполнить значениями всеми возможными способами необходимо оставшиеся $N - 1 = 2t$ элементов, количество заполняемых элементов совпадает. Возможные значения, которые можно поставить в незаполненные ячейки побочной диагонали, образуют множество $U_2 = \{0, 1, \dots, 2t\} \setminus \{t\} = \{0, 1, \dots, t - 1, t + 1, \dots, 2t\}$ мощностью $|U_2| = 2t$, мощности множеств U_1 и U_2 так же совпадают. На каждый из незаполненных элементов побочной диагонали так же накладывается два запрета с целью избежать дублирования значения в строках и столбцах со значениями с главной диагонали (число и состав ограничений совпадает).

Таким образом, задачи заполнения диагоналей для порядков $2t$ и $2t + 1$ эквивалентны: необходимо заполнить $2t$ клеток значениями множества мощностью $2t$ без повторений, причем на каждую клетку есть два запрета на использование значений, отличается лишь состав элементов множеств U_1 и U_2 , что на число заполнений не влияет. Соответственно, число заполнений совпадает, утверждение доказано.

Путем удаления дублирующихся значений можно получить числовой ряд

$$1, 0, 4, 80, 4752, 440192, 59245120, 10930514688,$$

который присутствует в OEIS под номером A000316, связан с карточными деками и имеет ряд известных аналитических формул для вычисления значений его членов [9–11], что позволяет расширить ряд A337302 в сторону больших значений без выполнения вычислительно сложного подсчета числа заполнений полным перебором и показать, что

$$A337302(N) = A000316 \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right) \quad (\text{данные особенности были отмечены совместно с Andrew$$

Howroyd и Alois P. Heinz в ходе апробации правок, связанных с добавлением новых числовых рядов в OEIS).

Классы эквивалентности X-образных диагональных заполнений

Для заданного X-образного диагонального заполнения можно посчитать число возможных дозаполнений до корректных ДЛК. Анализируя данные величины для различных X-образных заполнений, можно заметить, что довольно часто различным X-образным заполнениям соответствуют одинаковые мощности множеств соответствующих им ДЛК, что связано с тем, что различные X-образные диагональные заполнения изоморфны друг другу.

Построение классов эквивалентности для X-образных диагональных заполнений можно выполнить следующим образом: сформировать все возможные заполнения с фиксированной главной диагональю, к каждому заполнению применить все возможные комбинации M-преобразований (или, что то же самое, – все возможные ESODLS CMS) с последующей нормализацией по главной диагонали и выбором лексикографически минимального представителя в каждом из случаев. Полученное множество лексикографически минимальных X-образных диагональных заполнений образует искомые классы изоморфизма. Их количество в зависимости от порядка ДЛК N образует числовой ряд

$$1, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 20, 20, 67, 67, 596, 596,$$

который на момент выполнения расчетов не был представлен в OEIS, он прошел апробацию и был добавлен под номером A309283. Для него справедливо аналогичное

доказанному выше утверждение о том, что $A309283(2t) = A309283(2t+1)$ для всех $t \geq 0$ ввиду того, что любые комбинации M-преобразования (и соответствующие им ESODLS CMS) оставляют центральный элемент квадрата нечетного порядка на месте, меняя местами лишь окружающие его элементы диагоналей одинаковым количеством способов для порядков $2t$ и $2t+1$. Соответствующий числовой ряд без дублирования значений также был добавлен в OEIS под номером A338084. Для порядков $N \leq 10$ подсчет числа классов эквивалентности производится практически мгновенно, для порядка $N=11$ потребовалось 2,5 часа вычислительного времени процессора Core i7 4770 в 1 поток, для каждого из порядков $N=12$ и $N=13$ – приблизительно 2 дня расчетов в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home² при реальной производительности порядка 7 TFLOP/s и трех параллельно работающих подпроектах (аналогичные значения были получены Harry White с использованием независимой многопоточной программной реализации).

Классы изоморфизма X-образных диагональных заполнений будем называть *линейками*, а про соответствующие им ДЛК говорить, что они принадлежат к одной из линейек. Путем выполнения всех комбинаций M-преобразований к заданному произвольному ДЛК с последующей нормализацией по главной диагонали можно определить его принадлежность к одной из линейек, а соответствующий лексикографически минимальный ДЛК будем называть *сильно нормализованной КФ* (сокр. СКФ). Следует отметить, что просто нормализация ДЛК по главной диагонали в общем случае не приводит к получению СКФ, для которой на диагоналях ДЛК требуется получение лексикографически минимального представителя соответствующего класса изоморфизма X-образных диагональных заполнений путем выполнения M-преобразований (см. рис. 3).

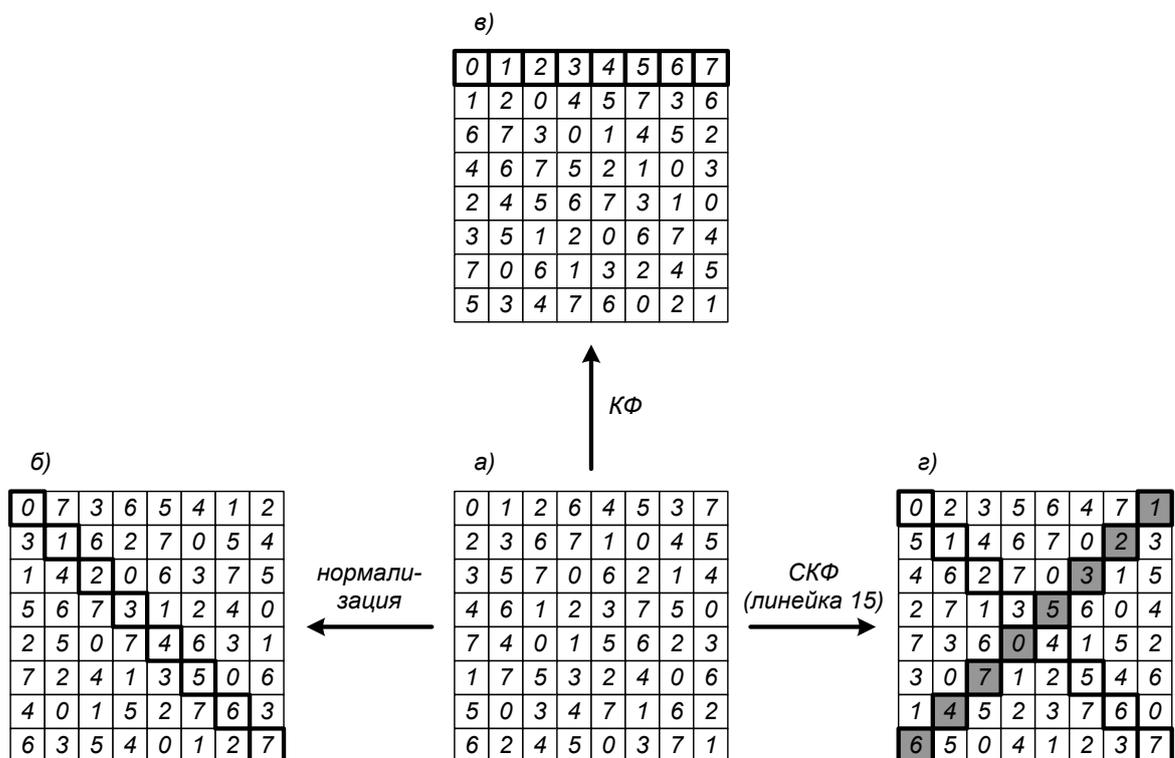


Рис. 3. Эквивалентные представления ДЛК: пример произвольного денормализованного ДЛК порядка 8 (а), изоморфного ему ДЛК, нормализованного по главной диагонали (б) и соответствующих ему КФ (в) и СКФ (г). Жирным выделены ячейки, по которым

² <https://gerasim.boinc.ru>

производится нормализация, темно серым показана побочная диагональ, определяющая принадлежность ДЛК к 15-й линейке

Общее число нормализованных ДЛК в таком случае можно посчитать через классы изоморфизма X-образных диагональных заполнений как $K_1 = A274171(N) = \sum_{i=1}^m |C_i| f_i$, где $m = A309283(N)$ – число классов изоморфизма X-образных диагональных заполнений (число линейек для выбранного порядка ДЛК N), $|C_i|$ – мощность i -го класса (т.н. кратность линейки или число X-образных диагональных заполнений, приводимых М-преобразованиями к одному и тому же лексикографически минимальному X-образному диагональному заполнению), f_i – число дозаполнений лексикографически минимального X-образного диагонального заполнения до корректных ДЛК (число *сильно нормализованных ДЛК*, сокр. СНДЛК), а общее число ДЛК как $K_2 = A274806(N) = K_1 \cdot N!$. Указанное разбиение на классы изоморфизма было использовано в [12] для быстрого подсчета числа ДЛК порядка 9, что позволило сократить необходимые вычислительные затраты приблизительно на 3 порядка.

Примеры линейек для ДЛК порядков 4 и 5 приведены на рис. 4.

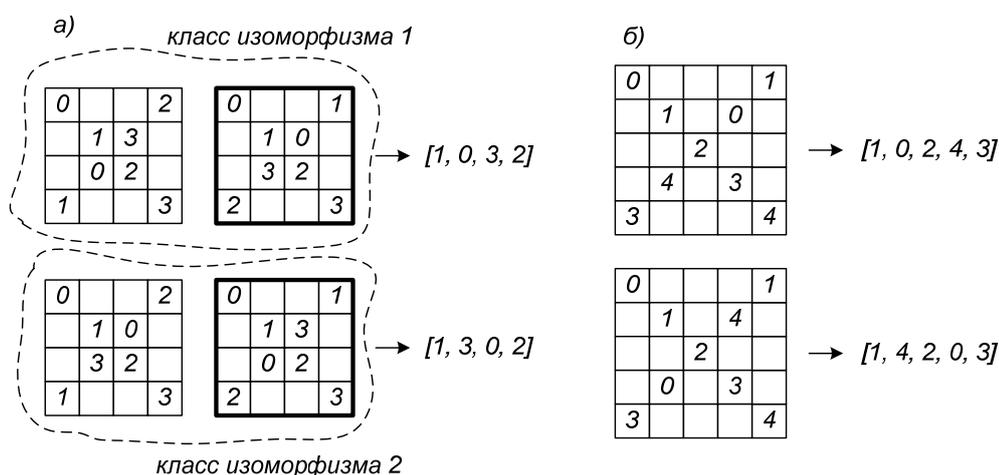


Рис. 4. Примеры X-образных диагональных заполнений порядков $N = 4$ (а) и $N = 5$ (б), образующих классы изоморфизма (линейки). Лексикографически минимальные представители классов изоморфизма выделены жирным.

Перечень линейек, их кратностей, соответствующие им число дозаполнений до ДЛК и число нормализованных ДЛК в каждой из линейек приведены в табл. 1–6.

Таблица 1. Линейки ДЛК порядка $N = 4$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
1	[1,0,3,2]	2	1	$2 \times 1 = 2$
2	[1,3,0,2]	2	0	$2 \times 0 = 0$
Общее число нормализованных ДЛК:				2

Таблица 2. Линейки ДЛК порядка $N = 5$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
-------------------	--------------------	---------------------------	---------------------------------	--

1	[1,0,2,4,3]	2	2	$2 \times 2 = 4$
2	[1,4,2,0,3]	2	2	$2 \times 2 = 4$
Общее число нормализованных ДЛК:				8

Таблица 3. Линейки ДЛК порядка $N = 6$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
1	[1,0,4,5,2,3]	16	8	128
2	[1,0,4,5,3,2]	48	0	0
3	[1,2,0,5,3,4]	16	0	0
Общее число нормализованных ДЛК:				128

Таблица 4. Линейки ДЛК порядка $N = 7$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
1	[1,0,5,3,6,2,4]	16	1 800	28 800
2	[1,0,5,3,6,4,2]	48	2 008	96 384
3	[1,2,0,3,6,4,5]	16	2 876	46 016
Общее число нормализованных ДЛК:				171 200

Таблица 5. Линейки ДЛК порядка $N = 8$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
1	[1,0,3,2,5,4,7,6]	12	855 680	10 268 160
2	[1,0,3,2,5,6,7,4]	192	1 087 936	208 883 712
3	[1,0,3,2,6,7,4,5]	96	2 079 952	199 675 392
4	[1,0,3,2,6,7,5,4]	192	1 701 792	326 744 064
5	[1,0,3,5,2,4,7,6]	24	607 872	14 588 928
6	[1,0,3,5,2,6,7,4]	384	1 075 784	413 101 056
7	[1,0,3,5,6,7,2,4]	768	1 673 128	1 284 962 304
8	[1,0,3,5,6,7,4,2]	384	1 621 760	622 755 840
9	[1,0,3,6,5,7,2,4]	192	1 714 248	329 135 616
10	[1,0,3,6,5,7,4,2]	192	1 537 024	295 108 608
11	[1,0,3,6,7,4,2,5]	384	1 675 696	643 467 264
12	[1,0,3,6,7,4,5,2]	384	1 739 980	668 152 320
13	[1,2,0,5,6,7,3,4]	384	1 678 124	644 399 616
14	[1,2,3,0,7,4,5,6]	48	1 607 168	77 144 064
15	[1,2,3,5,0,7,4,6]	384	1 656 184	635 974 656
16	[1,2,3,5,6,7,0,4]	384	1 649 308	633 334 272
17	[1,2,3,5,7,4,0,6]	192	1 072 016	205 827 072
18	[1,2,3,7,0,4,5,6]	48	1 472 416	70 675 968
19	[1,2,6,5,7,4,0,3]	96	1 641 968	157 628 928
20	[1,7,3,5,2,4,0,6]	12	480 000	5 760 000
Общее число нормализованных ДЛК:				7 447 587 840

Таблица 6. Линейки ДЛК порядка $N = 9$

Номер линейки i	Побочная диагональ	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число нормализованных ДЛК в линейке $ C_i \times f_i$
1	[1,0,3,2,4,6,5,8,7]	12	709 086 781 440	8 509 041 377 280
2	[1,0,3,2,4,6,7,8,5]	192	974 677 273 856	187 138 036 580 352
3	[1,0,3,2,4,7,8,5,6]	96	1 055 969 508 864	101 373 072 850 944
4	[1,0,3,2,4,7,8,6,5]	192	1 110 308 250 368	213 179 184 070 656
5	[1,0,3,6,4,2,5,8,7]	24	685 740 255 232	16 457 766 125 568
6	[1,0,3,6,4,2,7,8,5]	384	955 718 665 632	366 995 967 602 688
7	[1,0,3,6,4,7,8,2,5]	768	1 098 599 343 136	843 724 295 528 448
8	[1,0,3,6,4,7,8,5,2]	384	1 031 276 411 456	396 010 141 999 104
9	[1,0,3,7,4,6,8,2,5]	192	1 110 075 761 408	213 134 546 190 336
10	[1,0,3,7,4,6,8,5,2]	192	1 029 535 024 256	197 670 724 657 152
11	[1,0,3,7,4,8,5,2,6]	384	1 116 973 550 464	428 917 843 378 176
12	[1,0,3,7,4,8,5,6,2]	384	1 117 216 705 792	429 011 215 024 128
13	[1,2,0,6,4,7,8,3,5]	384	1 105 080 908 576	424 351 068 893 184
14	[1,2,3,0,4,8,5,6,7]	48	1 081 071 822 848	51 891 447 496 704
15	[1,2,3,6,4,0,8,5,7]	384	1 105 414 783 232	424 479 276 761 088
16	[1,2,3,6,4,7,8,0,5]	384	1 086 754 151 040	417 313 593 999 360
17	[1,2,3,6,4,8,5,0,7]	192	937 027 424 256	179 909 265 457 152
18	[1,2,3,8,4,0,5,6,7]	48	1 081 947 743 232	51 933 491 675 136
19	[1,2,7,6,4,8,5,0,3]	96	1 010 590 517 376	97 016 689 668 096
20	[1,8,3,6,4,2,5,0,7]	12	664 832 014 336	7 977 984 172 032
Общее число нормализованных ДЛК:				5 056 994 653 507 584

Замечание. Сумма кратностей линеек для выбранной размерности ДЛК N (столбец 3 приведенных выше таблиц) представляет собой число нормализованных диагональных X-

образных заполнений порядка N : $\sum_{i=1}^m |C_i| = 4337302(N)$.

На подсчет числа нормализованных ДЛК порядка 8 с использованием X-образных диагональных заполнений и их классов эквивалентности потребовалось 79 с (программная реализация Э.И. Ватутина, Delphi) и 90 с (программная реализация А.Д. Бельшева, C++) при запуске в 1 поток. Ранее [13] подсчет был организован в рамках проекта Gerasim@Home без использования классов эквивалентности, расчет занял около 2 суток. Таким образом, в данном случае выигрыш во времени составляет величину порядка 400 тыс. раз.

Генератор СКФ ДЛК

Рассмотренное выше разбиение X-образных диагональных заполнений ДЛК на линейки удобно для подсчета ДЛК, однако для других задач (например, поиск ДЛК с заданными свойствами, неразличимыми в рамках главного класса) он лучше, чем просто перебор всех возможных нормализованных ДЛК, но и в то же время не спасает от повторов при обработке изоморфных квадратов, т.к. в каждой линейке ДЛК с одними и теми же свойствами и одной и той же КФ будет обработан несколько раз подряд (за исключением случаев, в которых для некоторых размерностей N существуют линейки максимально возможной кратности C_{\max} , в которых содержатся только СКФ). Чтобы этого избежать, необходимо гарантированно обрабатывать по одному квадрату из каждого главного класса, т.е. реализовать генератор СКФ ДЛК.

Простейшей реализацией такого генератора может быть следующая: для всех линеек необходимо сформировать все дозаполнения до ДЛК, проверить каждое на то, является ли полученный квадрат СКФ или нет, и вернуть только СКФ. Однако темп генерации СКФ на выходе такого генератора будет невысок (несколько сотен — тысяч СКФ/с), он будет лимитироваться не скоростными характеристиками генератора (сотни тысяч — миллионы ДЛК/с), а проверкой на СКФ.

С использованием ESODLS схем темп формирования СКФ на выходе генератора можно повысить как минимум на порядок. Несложно заметить, что применение ESODLS схем (число которых совпадает с числом комбинаций М-преобразований) к выбранному X-образному диагональному заполнению X_0 с последующей нормализацией по главной диагонали и получением X-образного заполнения $X_0 \xrightarrow{ESODLS\ CMS_i} X'$ может приводить к двум исходам:

1. полученное X-образное заполнение X' будет совпадать с исходным: $X_0 = X'$;
2. будет получено другое X-образное заполнение из того же класса эквивалентности, изоморфное исходному: $X_0 \neq X'$.

Примеры, иллюстрирующие данные ситуации, приведены на рис. 5.

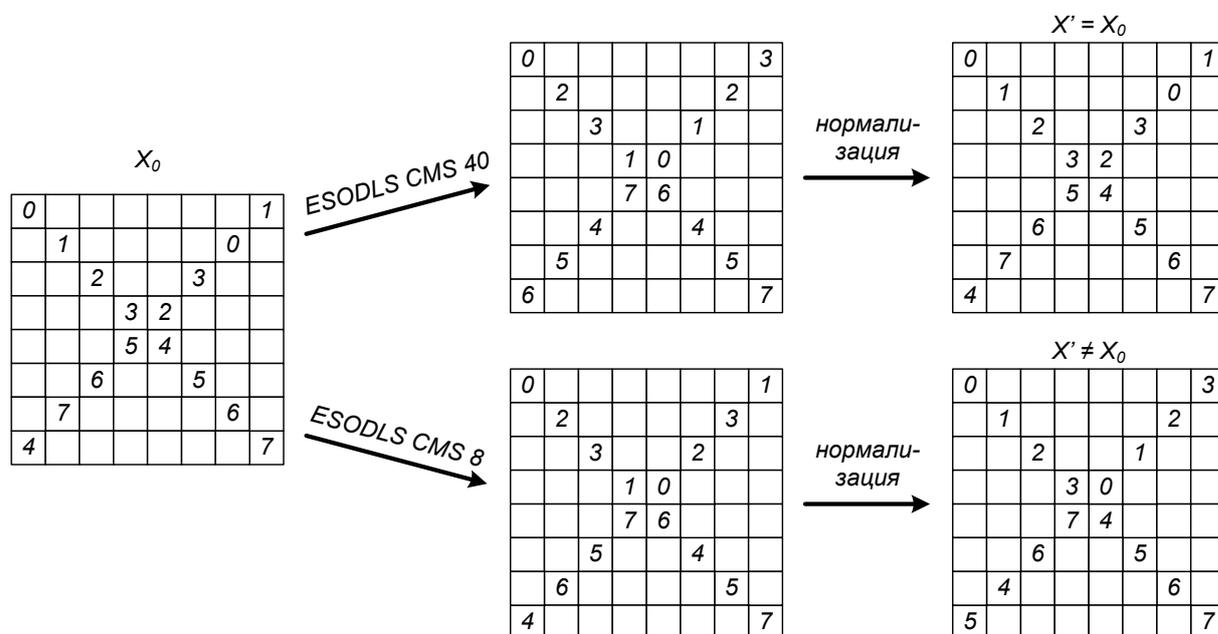


Рис. 5. Примеры различных ESODLS схем, приводящих к получения разных X-образных диагональных заполнений

С учетом изложенного выше несложно показать, что для каждого из лексикографически минимальных представителей классов эквивалентности X-образных диагональных заполнений можно отобрать такие ESODLS схемы, применение которых приводит к исходу 1 и СКФ находится среди результатов их применения, причем чем выше кратность $|C_i|$ линейки i , тем меньше число таких схем, равно $\frac{C_{\max}}{|C_i|}$ (применение других схем дает «большее значение» побочной диагонали ДЛК, что означает невозможность получения СКФ после преобразования, т.к. по определению СКФ лексикографически минимальна в соответствующем главном классе). Соответственно при проверке ДЛК на предмет того, является ли он СКФ или нет, число выполняемых действий (отображений проверяемого ДЛК с использованием ESODLS схем) сокращается

с C_{\max} до $\frac{C_{\max}}{|C_i|} - 1$, т.е. в $\eta = \frac{C_{\max}}{\frac{C_{\max}}{|C_i|} - 1} \approx |C_i|$ раз (-1 в формуле появляется потому, что

применение тривиальной ESODLS CMS не имеет смысла, т.к. X-образное заполнение она не изменяет, отображая каждый элемент сам в себя). Несложно заметить, что для линейек максимальной кратности $|C_i| = C_{\max}$ все соответствующие дозаполнения до ДЛК являются СКФ.

Отталкиваясь от теоретических выкладок, рассмотренных выше, была разработана программная реализация генератора СКФ ДЛК заданного порядка (автор – Ватутин Э.И.), результаты ее работы приведены в табл. 7–11.

Таблица 7. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 4$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число СКФ ДЛК в линейке n_i
1	2	1	1
2	2	0	0
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)			1

Таблица 8. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 5$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число СКФ ДЛК в линейке n_i
1	2	2	1
2	2	2	1
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)			2

Таблица 9. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 6$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число СКФ ДЛК в линейке n_i
1	16	8	2
2	48	0	0
3	16	0	0
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)			2

Таблица 10. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 7$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число СКФ ДЛК в линейке n_i
1	16	1 800	181
2	48	2 008	530
3	16	2 876	261
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)			972

Таблица 11. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 8$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число дозаполнений до ДЛК f_i	Число СКФ ДЛК в линейке n_i	Темп генерации, тыс. СКФ ДЛК/с
1	12	855 680	8 148	30

2	192	1 087 936	137 801	843
3	96	2 079 952	135 595	1 926
4	192	1 701 792	213 166	2 530
5	24	607 872	10 092	50
6	384	1 075 784	270 633	5 146
7	768	1 673 128	837 748	3 723
8	384	1 621 760	405 668	35 455
9	192	1 714 248	214 433	3 369
10	192	1 537 024	193 044	847
11	384	1 675 696	419 434	3 889
12	384	1 739 980	437 267	1 669
13	384	1 678 124	421 525	2 675
14	48	1 607 168	51 530	207
15	384	1 656 184	414 374	11 826
16	384	1 649 308	412 695	2 318
17	192	1 072 016	135 729	908
18	48	1 472 416	46 301	1 858
19	96	1 641 968	103 873	543
20	12	480 000	4 040	26
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)			4 873 096	

Приведенные в таблицах числа в точности совпали с полученными ранее числами главных классов ДЛК (см. числовой ряд A287764 в OEIS) [3]. Для большинства линеек имеет место соотношение $\frac{f_i}{n_i} \approx \frac{C_{\max}}{|C_i|}$, которое не представляет собой точное равенство

только ввиду равнозначности различных главных классов ДЛК. Из данного соотношения следует, что число СКФ ДЛК в линейке пропорционально как ее кратности, так и числу

соответствующих ей дозаполнений до ДЛК: $n_i \approx \underbrace{\frac{1}{C_{\max}}}_{const} \times |C_i| f_i$.

Подсчет главных классов ДЛК порядка 9

С использованием разработанного генератора СКФ ДЛК можно осуществить подсчет числа СКФ ДЛК порядка 9. Для этого вычислительных возможностей однопоточной программной реализации недостаточно, ввиду чего было произведено разделение исходной задачи на независимые подзадачи, которые были обчислены машинами добровольцев, принимавших участие в проекте Gerasim@Home. В качестве исходных данных одного расчетного задания (англ. Work Unit, сокр. WU) на машину кранчера передавались номер линейки (фактически X-образное диагональное заполнение) и одно из возможных заполнений $d = 10$ ячеек формируемых ДЛК. Число 10 (фактически максимальная глубина рекурсии при генерации WU'шек) было определено эмпирически как баланс между числом WU'шек и временем их счета (уменьшение данного значения ведет к уменьшению числа WU'шек при одновременном увеличении времени их счета), общее количество расчетных заданий при выбранной глубине d составило 633 300. Номера заполняемых недиагональных ячеек определялись в соответствии с принципом минимума возможностей [13]. Пример одного из начальных заполнений ДЛК, передаваемый на машину кранчера, приведен на рис. 6.

0	2	3	5	6	4	7	8	1
	1	4	2			5	0	
		2				3		
			3		2			
				4				
			6		5			
		5				6		
	8						7	
7								8

Рис. 6. Пример начального заполнения ДЛК, передаваемого на машину кранчера: жирным выделены ячейки X-образного диагонального заполнения, серым – d заранее заполненных ячеек ДЛК

Для полученного j -го начального заполнения ДЛК полным перебором определялись две величины: число a_j СКФ ДЛК с использованием рассмотренной выше сокращенной проверки на СКФ с использованием подмножества ESODLS схем и число дозаполнений до корректного ДЛК b_j . Для приведенного на рис. 6 примера $a_j = 1\,536\,075$ и $b_j = 12\,783\,424$. Эксперимент занял приблизительно месяц расчета при реальной производительности проекта порядка 7 TFLOP/s и двух параллельно работающих подпроектах.

Параллельно с выполнением эксперимента производилась программная оптимизация расчетного кода, которая в итоге позволила снизить время расчета приблизительно на порядок, ввиду чего общее интегральное время эксперимента могло бы быть и меньше. В итоговой версии кода приблизительно 2/3 времени занимает генератор ДЛК, остальные 1/3 – отображение через ESODLS схемы, нормализация по главной диагонали и сравнение пары ДЛК на меньше. Из последних трех действий нормализация занимает примерно половину времени. При необходимости генератор ДЛК можно реализовать быстрее с использованием программной реализации на базе вложенных циклов и битовой арифметики, остальные операции являются элементарными, существенного ускорения от их дальнейшей оптимизации добиться сложно.

В результате эксперимента были получены значения a_j и b_j для всех начальных заполнений ДЛК. Далее число СКФ ДЛК в линейке было определено как $\sum_j a_j$ для соответствующих ей расчетных заданий, а общее число дозаполнений до ДЛК (число СНДЛК) – как $\sum_j b_j$. Полученные в ходе вычислительного эксперимента результаты приведены в табл. 12.

Таблица 12. Перечисление СКФ ДЛК порядка $N = 9$

Номер линейки i	Кратность линейки $ C_i $	Число расчетных заданий	Число дозаполнений до ДЛК $f_i = \sum_j b_j$	Число СКФ ДЛК в линейке $n_i = \sum_j a_j$
1	12	29 148	709 086 781 440	5 540 161 690
2	192	30 210	974 677 273 856	121 835 130 652
3	96	30 946	1 055 969 508 864	65 998 993 664
4	192	30 902	1 110 308 250 368	138 788 845 312
5	24	29 346	685 740 255 232	10 714 968 132
6	384	30 752	955 718 665 632	238 930 442 470
7	768	31 669	1 098 599 343 136	549 299 969 552
8	384	31 178	1 031 276 411 456	257 819 693 456

9	192	31 336	1 110 075 761 408	138 760 018 564
10	192	30 892	1 029 535 024 256	128 692 729 396
11	384	31 175	1 116 973 550 464	279 243 953 632
12	384	31 222	1 117 216 705 792	279 304 740 800
13	384	33 109	1 105 080 908 576	276 271 823 858
14	48	34 955	1 081 071 822 848	33 784 169 152
15	384	33 672	1 105 414 783 232	276 354 111 228
16	384	33 966	1 086 754 151 040	271 688 772 740
17	192	32 794	937 027 424 256	117 129 393 532
18	48	34 323	1 081 947 743 232	33 811 009 926
19	96	32 348	1 010 590 517 376	63 163 016 100
20	12	29 357	664 832 014 336	5 194 211 538
Общее число СКФ ДЛК (главных классов ДЛК)				3 292 326 155 394

Аналогичные приведенным в табл. 12 результаты были получены на независимой программной реализации (автор – А.Д. Бельшев), в которой также производилось деление общего множества СКФ ДЛК на линейки, однако в составе линеек выделялись сублинейки в рамках т.н. «Юнион Джек» заполнений (заполнение двух диагоналей, центрального столбца и центральной строки ДЛК нечетного порядка), для них аналогично рассмотренному выше производилось разбиение на классы изоморфизма.

Число главных классов (СКФ) ДЛК порядка 9 ранее было неизвестно, оно прошло апробацию и было добавлено в состав числового ряда A287764 в OEIS. Таким образом, отталкиваясь от изложенных выше теоретических положений, был разработан генератор СКФ ДЛК, базирующийся на классах изоморфизма X-образных диагональных заполнений и применении ограниченного числа ESODLS схем и обладающий темпом генерации порядка десятков – сотен тысяч СКФ ДЛК/с. Кроме быстрого подсчета непосредственно числа главных классов ДЛК, нормализованных ДЛК и ДЛК общего вида он может быть использован в перспективе в составе вычислительных экспериментов, направленных на поиск ДЛК с интересными свойствами.

Авторы статьи выражают благодарность всем кранчерам, принявшим участие в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@home, а также участникам citerra и SerVal (команда Russia Team) интернет-портала BOINC.ru за помощь в организации вычислительных экспериментов и конструктивное обсуждение их деталей.

Библиографический список

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.
2. Чебраков Ю.В. Теория магических матриц. Санкт-Петербург, 2016. 352 с.
3. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of Isotopy Classes of Diagonal Latin Squares of Small Order Using Volunteer Computing // Communications in Computer and Information Science. Vol. 965. Springer, 2018. pp. 578–586. DOI: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.
4. Anderson D.P. BOINC: A Platform for Volunteer Computing // Journal of Grid Computing. 2019. pp. 1-24. DOI: 10.1007/s10723-019-09497-9.
5. Vatutin E., Zaikin O., Manzyuk M., Nikitina N. Searching for Orthogonal Latin Squares via Cells Mapping and BOINC-based Cube-and-Conquer // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1510. pp. 498–512. DOI: 10.1007/978-3-030-92864-3_38.
6. Vatutin E., Belyshev A. Enumerating the Orthogonal Diagonal Latin Squares of Small Order for Different Types of Orthogonality // Communications in Computer and Information Science. Vol. 1331. Springer, 2020. pp. 586–597.

7. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.
8. Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences // <https://oeis.org/>
9. Knudsen F.F., Skau I. On the Asymptotic Solution of a Card-Matching Problem // Mathematics Magazine. Vol. 69. 1996. pp. 190–197.
10. Margolius B.H. The Dinner-Diner Matching Problem // Mathematics Magazine. Vol. 76. 2003. pp. 107–118.
11. Nicolaescu L.I. Derangements and Asymptotics of the Laplace Transforms of Large Powers of a Polynomial // New York J. Math. Vol. 10. 2004. pp. 117–131.
12. Kochemazov S., Zaikin O., Vatutin E., Belyshev A. Enumerating Diagonal Latin Squares of Order Up to 9 // Journal of Integer Sequences. Vol. 23. Iss. 1. 2020. Article 20.1.2.
13. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
14. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Титов В.С. Оценка числа трансверселей для диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. 2018. № 1. С. 12–21.