Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Ватутин Э.И.

Переславль-Залесский, 2022

Понятие ЛК и ДЛК

$A = \|a_{ij}\|$

$i,\ j = \overline{1,\ N}$

$N = |S|$

$S = \{0, 1, 2, ..., N-1\}$

$$\forall i,\ j, k = \overline{1,\ N},\ j \neq k : \left(a_{ij} \neq a_{ik}\right) \wedge \left(a_{ji} \neq a_{ki}\right)$$

$$\forall i,\ j = \overline{1,\ N}, i \neq j : \left(a_{ii} \neq a_{jj}\right) \wedge \left(a_{N-i+1,\ N-i+1} \neq a_{N-j+1,\ N-j+1}\right)$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 2 & 9 & 4 & 3 & 6 & 7 & 5 & 0 & 8 \\
2 & 9 & 3 & 1 & 7 & 0 & 5 & 8 & 4 & 6 \\
3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 9 & 6 & 5 & 0 \\
4 & 3 & 5 & 9 & 2 & 1 & 8 & 0 & 6 & 7 \\
5 & 6 & 4 & 8 & 1 & 2 & 0 & 9 & 7 & 3 \\
6 & 5 & 8 & 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 9 & 4 \\
7 & 8 & 6 & 0 & 9 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\
8 & 7 & 0 & 5 & 6 & 9 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
9 & 0 & 7 & 6 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{pmatrix}$$

Нормализованный ЛК порядка 10

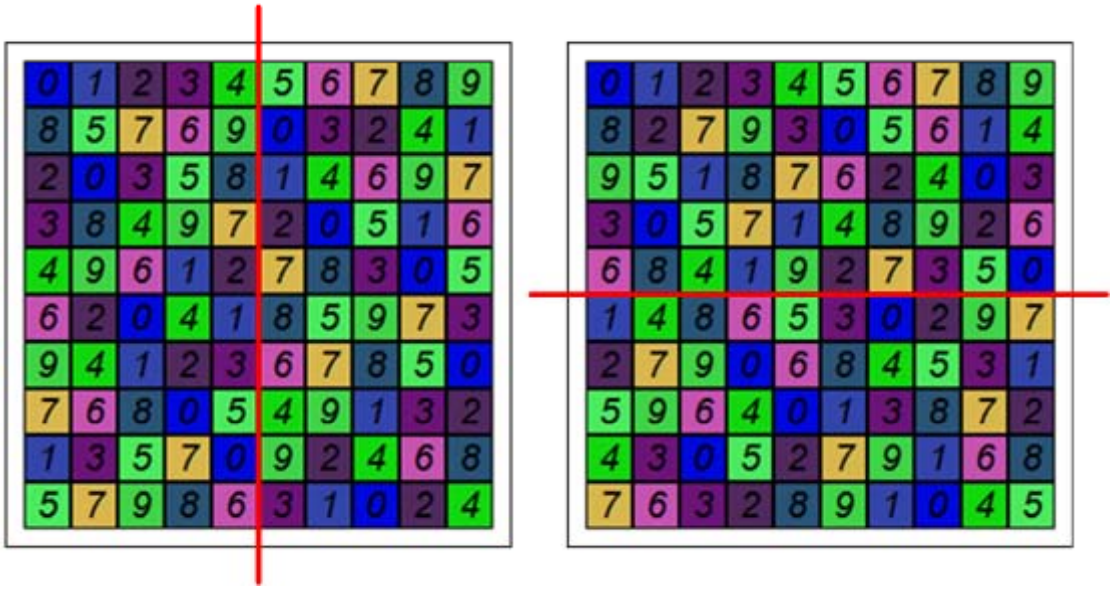
$$N! \times (N-1)!$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
7 & 2 & 4 & 9 & 0 & 6 & 5 & 1 & 3 & 8 \\
8 & 3 & 6 & 7 & 5 & 9 & 0 & 2 & 4 & 1 \\
2 & 6 & 8 & 5 & 1 & 7 & 4 & 0 & 9 & 3 \\
5 & 8 & 9 & 1 & 7 & 0 & 3 & 4 & 6 & 2 \\
9 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 & 6 & 0 & 5 \\
4 & 7 & 5 & 6 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 0 \\
3 & 0 & 7 & 8 & 2 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 \\
6 & 5 & 0 & 4 & 3 & 2 & 9 & 8 & 1 & 7 \\
1 & 9 & 3 & 0 & 6 & 8 & 2 & 5 & 7 & 4
\end{pmatrix}$$

Нормализованный ДЛК порядка 10

$$(N-1)!$$

Симметричные в одной плоскости ДЛК

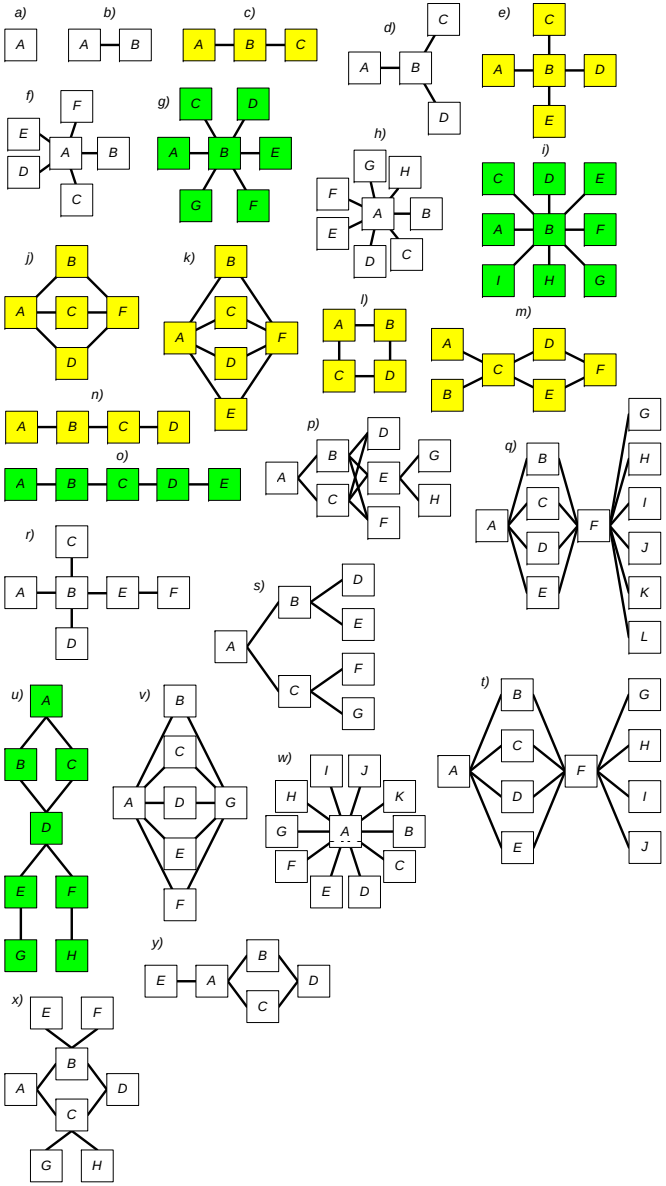


Свойства:

- существуют только для порядков N=2k;
- имеют большое число (диагональных) трансверсалей;
- входят в состав редких комбинаторных структур.

Числовые ряды в OEIS: A287649, A292516, A296060, A296061, A340546

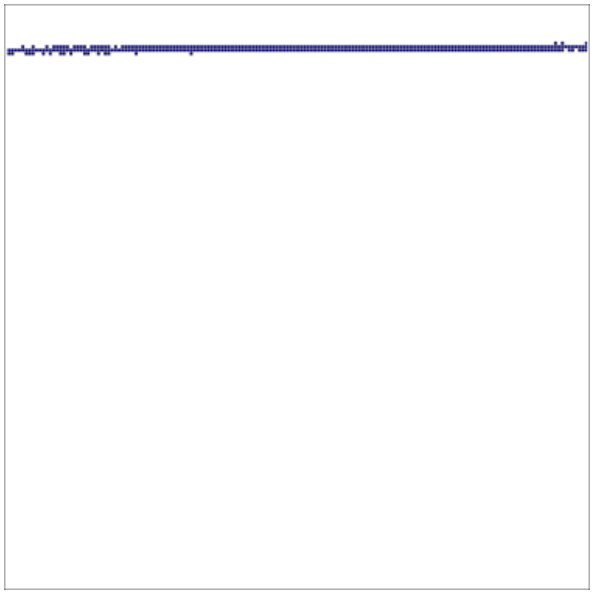
Комбинаторные структуры от симметричных в одной плоскости ДЛК порядка 10



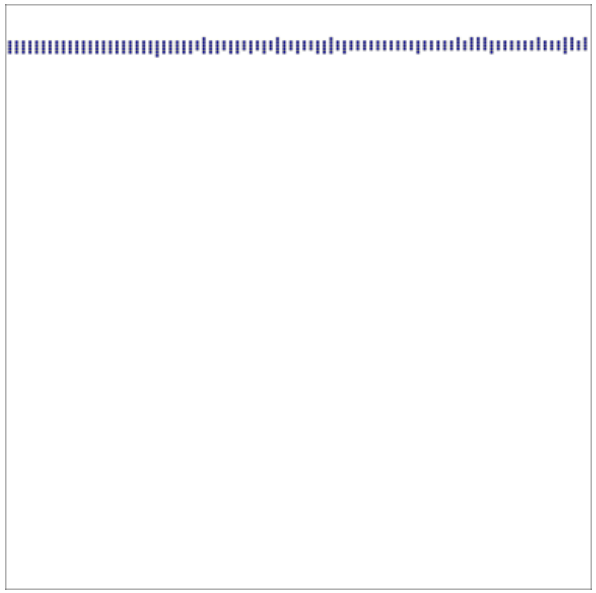
- **желтый** – структуры найдены от симметричных в одной плоскости ДЛК, но не только;
- **зеленый** – структуры найдены **только** от симметричных в одной плоскости ДЛК.

http://evatutin.narod.ru/evatutin_ls_all_structs_rus.pdf

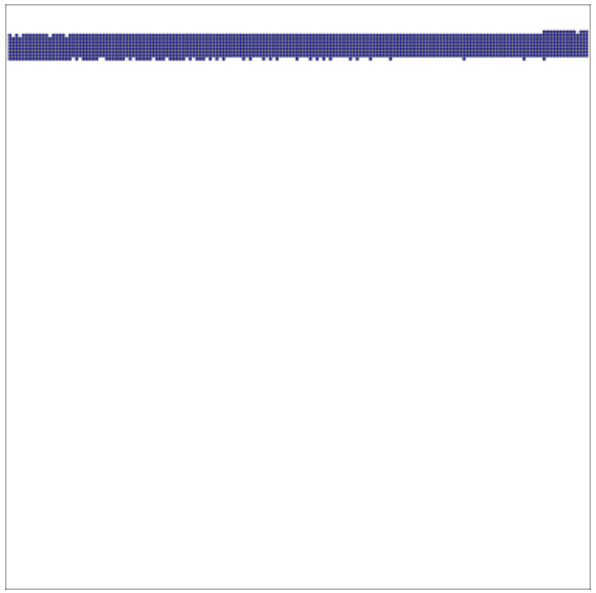
Спектры числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 12



Спектр от случайных ДЛК, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

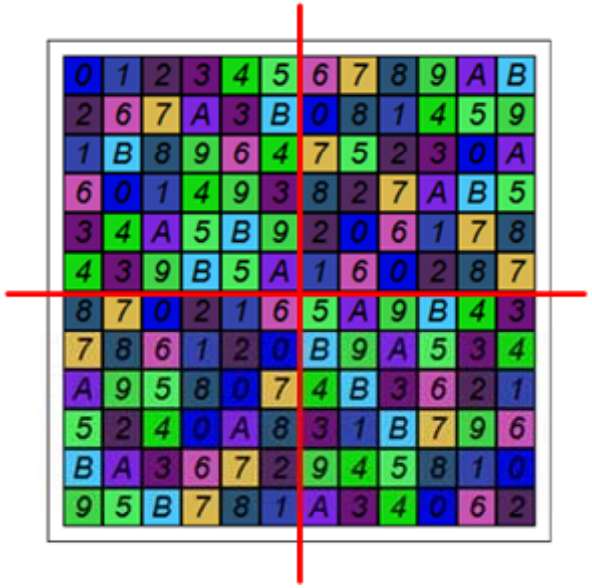


Спектр от случайных ДЛК, симметричных в одной плоскости



Спектр от случайных ДЛК, симметричных в одной плоскости, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

Дважды симметричные ДЛК



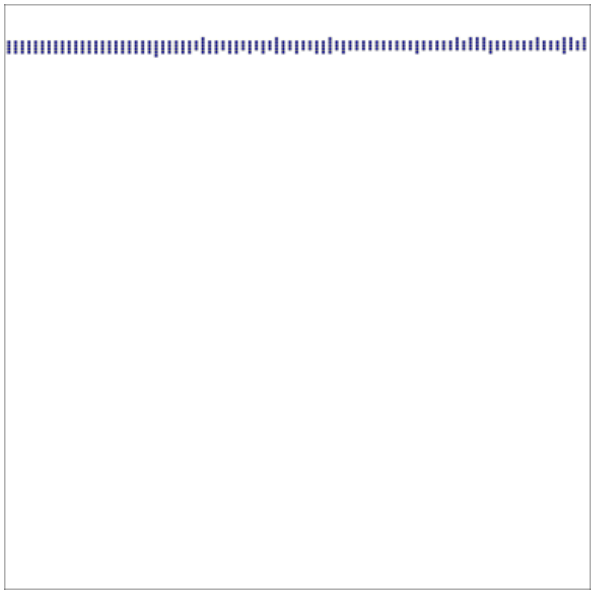
Свойства:

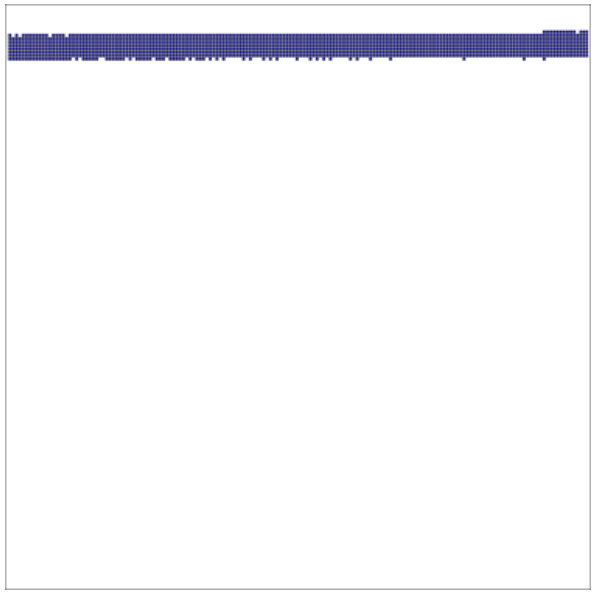
- существуют только для порядков N=4k;
- имеют большое число (диагональных) трансверсалей;
- входят в состав редких комбинаторных структур;
- обеспечивают получение интересных спектров.

Числовые ряды в OEIS: A287650, A292517, A340550

Спектры числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 12

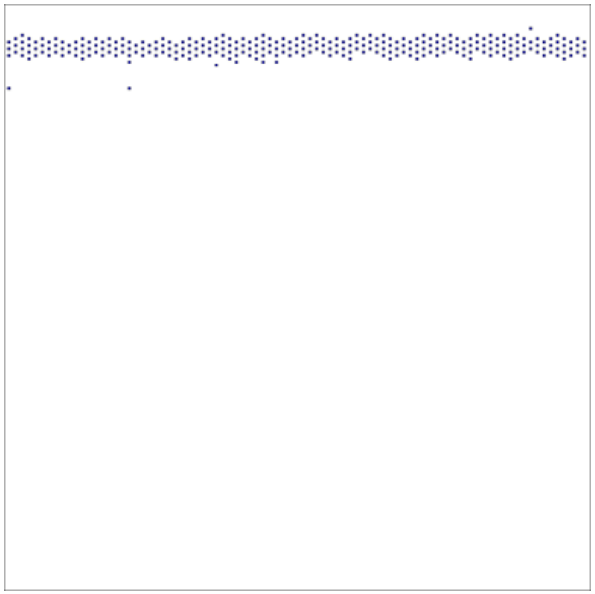
Спектр от случайных ДЛК, симметричных в одной плоскости

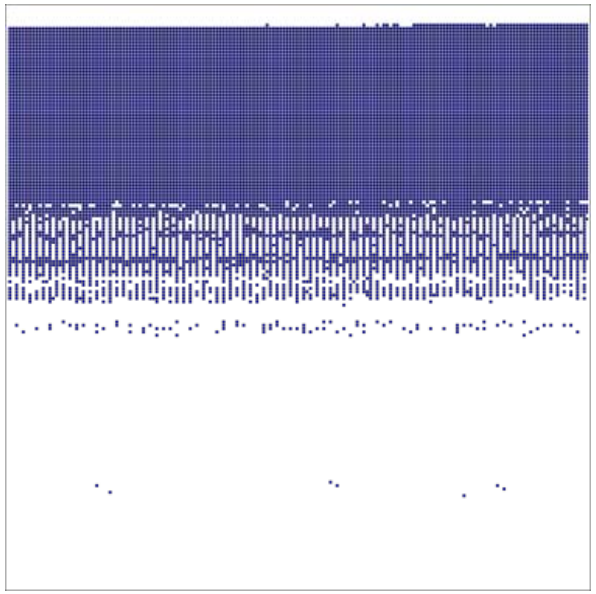




Спектр от случайных ДЛК, симметричных в одной плоскости, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

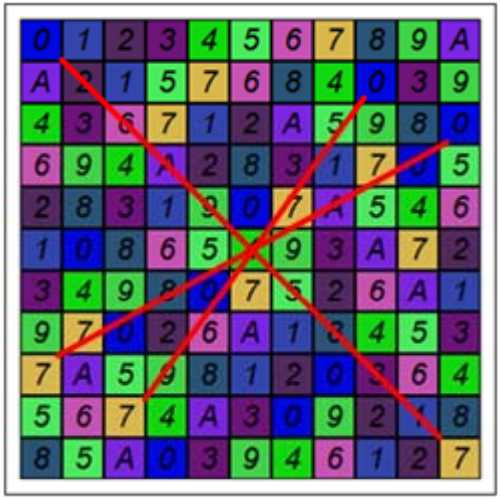
Спектр от случайных дважды симметричных ДЛК





Спектр от случайных дважды симметричных ДЛК, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

Центрально-симметричные ДЛК



Свойства:

- по-видимому существуют только для порядков N != 4k+2;
- все дважды симметричные ДЛК обладают центральной симметрией, обратное в общем случае не верно (спасибо И. Чернову за гипотезу!);
- являются частным случаем ассоциативных магических квадратов.

Числовые ряды в OEIS: A293777, A293778, A340545

Обобщенно-симметричные ДЛК

$$x' = P_x[x]$$
$$y' = P_y[y]$$
$$v' = P_v[v]$$
$$L(P)$$

$$\{\underbrace{1, 1, ..., 1}_{N}\} = \{1 : N\}$$

$$\{\underbrace{2, 2, ..., 2}_{\frac{N}{2}}\} = \{2 : \frac{N}{2}\}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	0	5	7	8	9	6	4
8	6	7	4	9	2	3	1	0	5
6	0	1	9	2	8	4	5	3	7
5	4	9	8	6	0	1	3	7	2
4	9	8	1	7	3	0	2	5	6
9	7	0	2	3	6	5	8	4	1
7	3	5	6	8	1	9	4	2	0
2	8	4	5	0	9	7	6	1	3
3	5	6	7	1	4	2	0	9	8

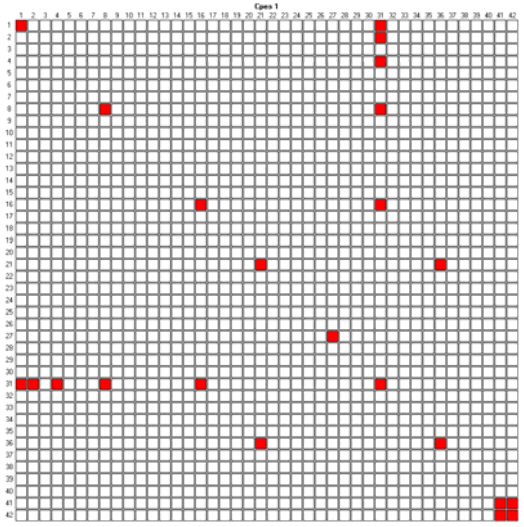
1-(2,31,31)

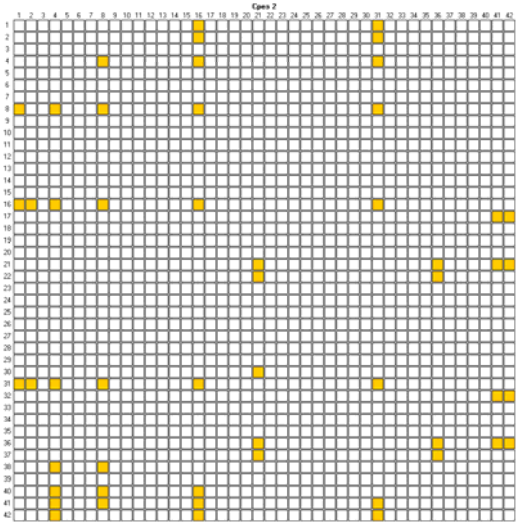
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	0	4	6	8	7	9	5	3
9	4	7	0	5	1	8	6	3	2
7	8	4	5	3	9	2	0	6	1
8	5	6	9	1	0	3	4	2	7
3	7	9	1	8	6	0	2	4	5
2	0	5	7	9	3	4	8	1	6
5	6	1	8	2	7	9	3	0	4
6	3	8	2	7	4	5	1	9	0
4	9	3	6	0	2	1	5	7	8

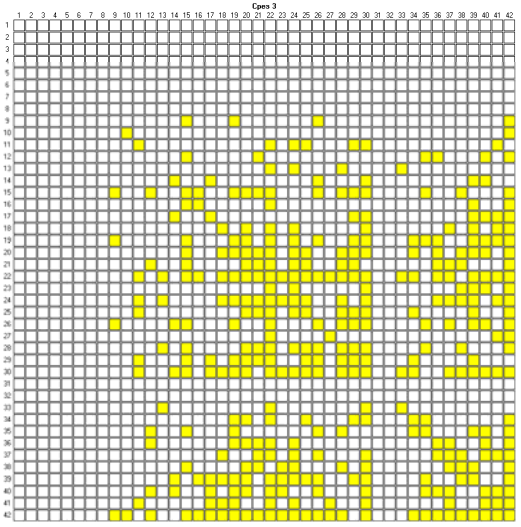
1-(4,31,31)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	0	4	7	8	9	3	6	5
3	7	1	8	5	9	0	2	4	6
6	9	8	7	2	0	5	1	3	4
9	0	4	6	3	7	8	5	1	2
8	4	5	9	1	6	2	0	7	3
2	5	7	0	6	3	4	8	9	1
5	6	3	2	8	4	1	9	0	7
7	8	6	1	9	2	3	4	5	0
4	3	9	5	0	1	7	6	2	8

1-(27,27,27)







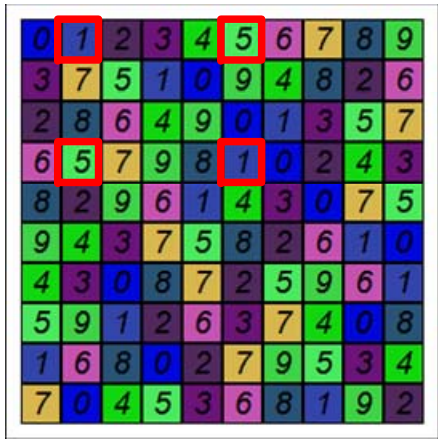
Свойства:

- обобщение плоскостной и центральной симметрий;
- описание дополнительного количества симметрий, не имеющих геометрической интерпретации.

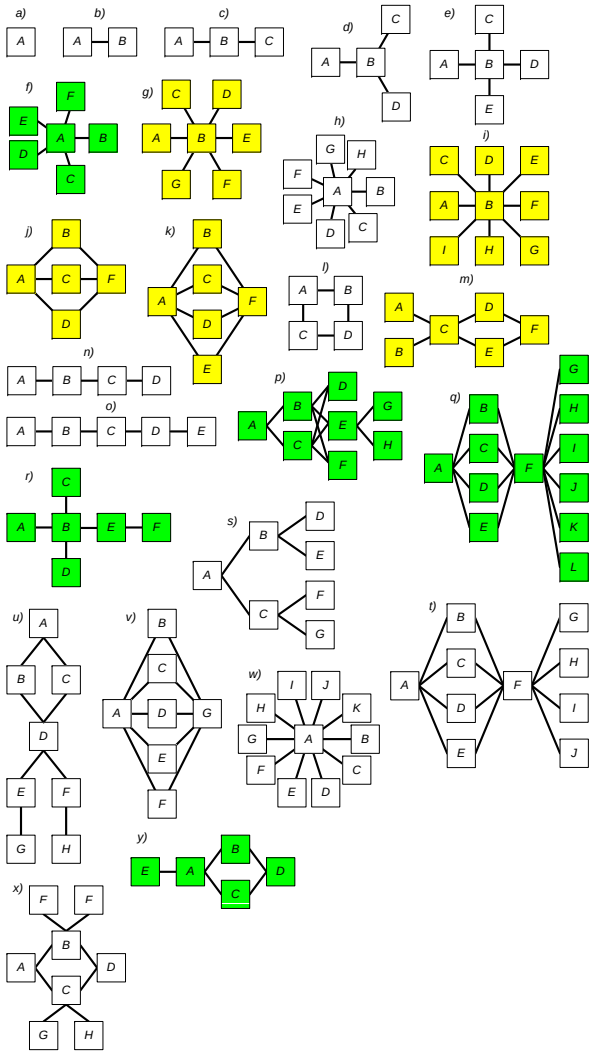
Числовые ряды в OEIS: A357473, ожидается добавление серии рядов…
http://evatutin.narod.ru/odls_gen_symms/n10_odls_symmetries_list.html

Частично-обобщенно-симметричные ДЛК

$$M < N^2$$



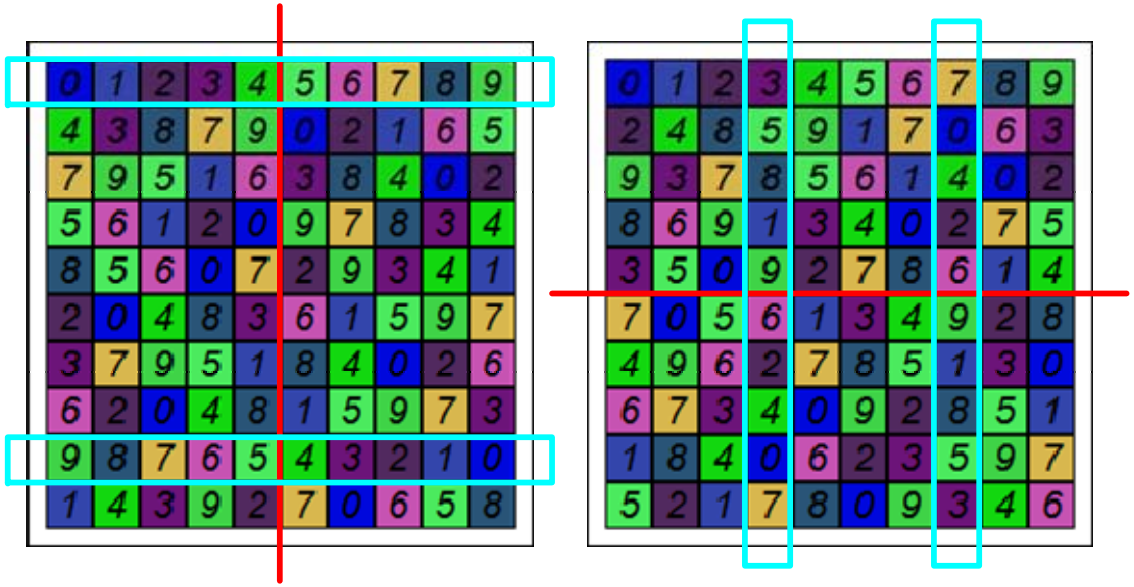
Частично-горизонтально-симметричный ДЛК, M=96



Свойства:

- существуют для размерностей, где не существует «точная» симметрия;
- свойства ДЛК близки к ДЛК с «точной симметрией»;
- образуют редкие комбинаторные структуры.

ДЛК Брауна



Примеры горизонтально-симметричного и вертикально-симметричного ДЛК Брауна

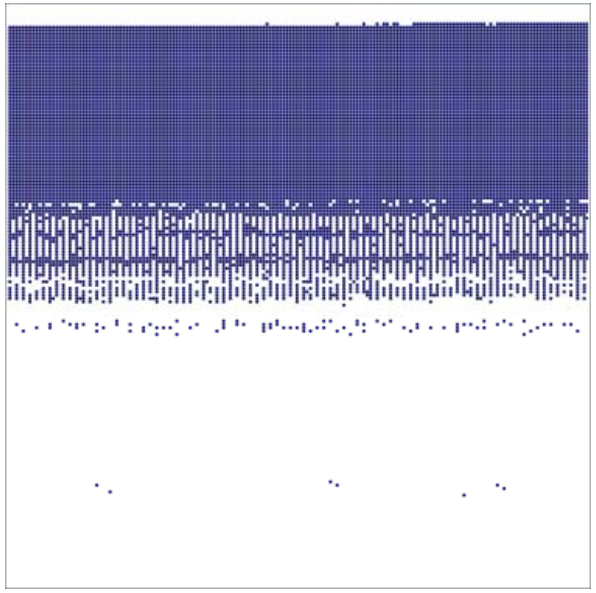
Свойства:

- строчная/столбцевая инверсия + плоскостная симметрия;
- рекордно большое число трансверсалей: N ∈ {4, 6, 10, 12, 14, 16};
- рекордно большое число диагональных трансверсалей: N ∈ {4, 12, 16};
- существуют дважды ДЛК Брауна.

Числовые ряды в OEIS: A339641, A339305, A340186

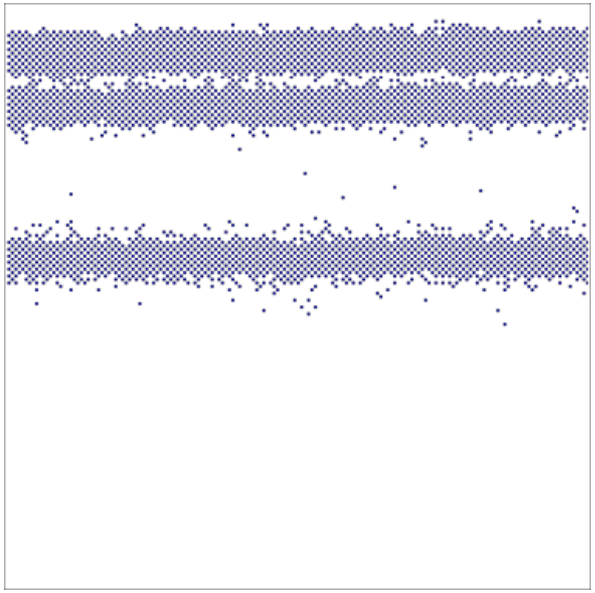
Спектры числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 12

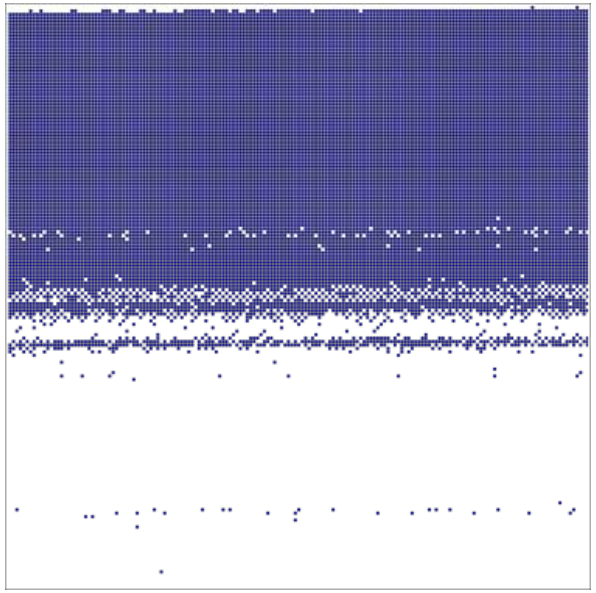
Спектр от случайных дважды симметричных ДЛК



Спектр от случайных дважды симметричных ДЛК, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

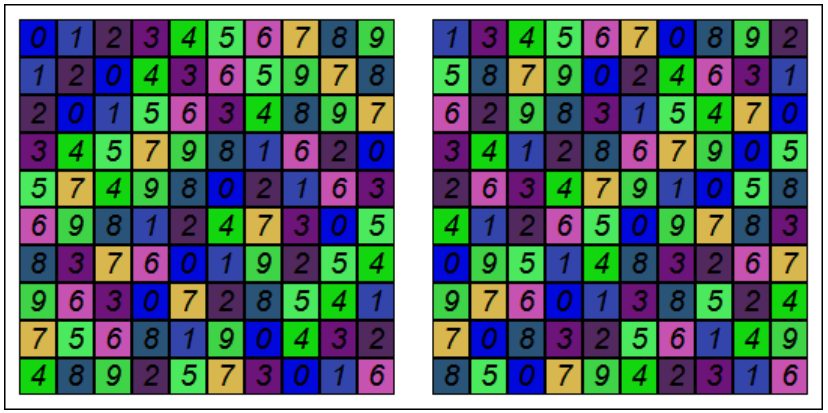
Спектр от случайных ДЛК Брауна



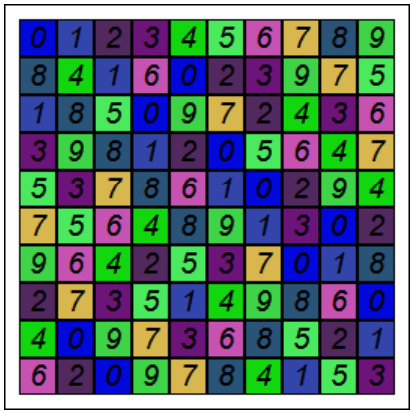


Спектр от случайных ДЛК Брауна, расширенный поворотом 1 интеркалята и 1 цикла

Пустышки и ОДЛК



Пара ОДЛК



Пустышка

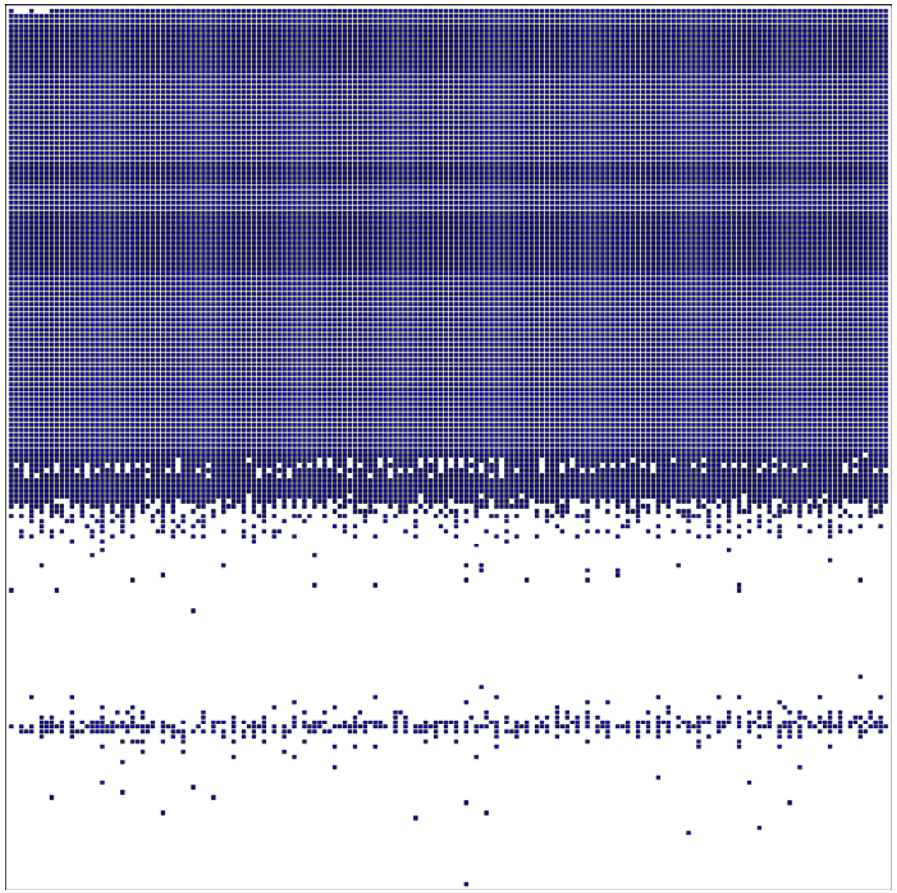
Свойства:

- разные типы ортогональности;
- различные спектры;
- зная минимально возможное число диагональных трансверсалей в ОДЛК можно ускорить работу канонизатора на базе метода Эйлера-Паркера и DLX на 10-15%.

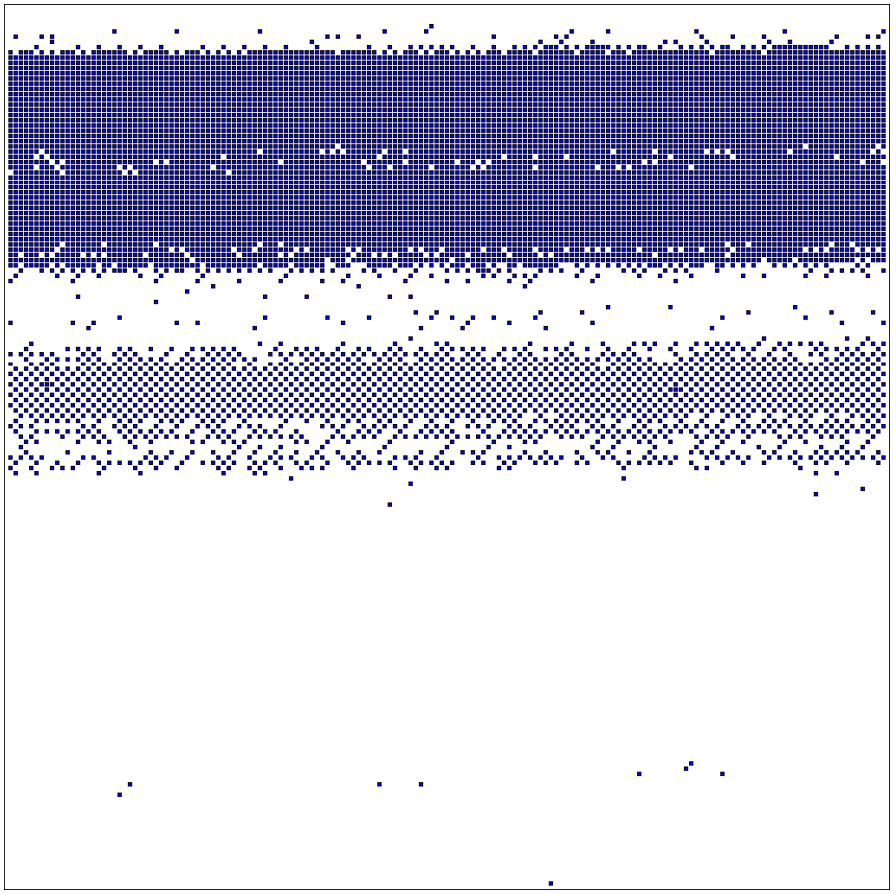
Числовые ряды в OEIS:

- пустышки — A305568, A305569, A337309
- ОДЛК — A305570, A305571, A330391

Примеры аппроксимаций спектров ДЛК и ОДЛК порядка 12



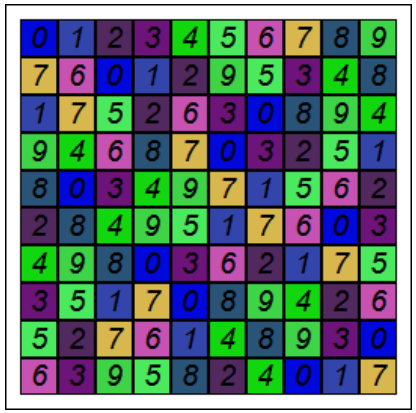
Число диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 12



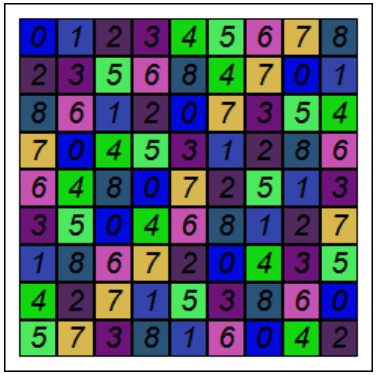
Число диагональных трансверсалей в ОДЛК порядка 12

- http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_diagonal_transversals_n12_17693_known_items.txt
- http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_odls_diagonal_transversals_n12_8763_known_items.txt

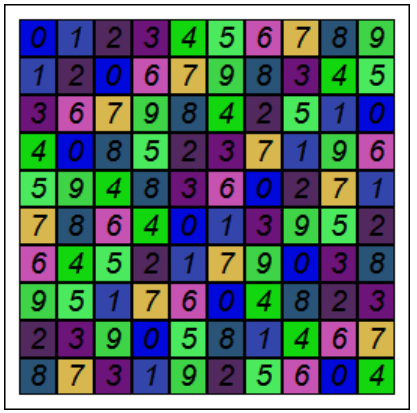
Различные типы ортогональности



SODLS



DSODLS



ESODLS

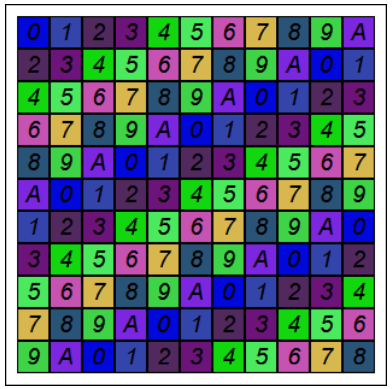
Свойства:

- могут быть получены без метода Эйлера-Паркера с темпом порядка миллионов ДЛК/с вместо тысяч ДЛК/с.

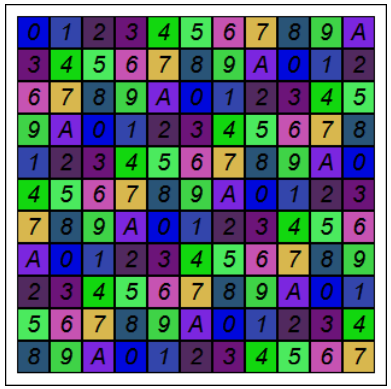
Числовые ряды в OEIS:

- SODLS — A329685, A287761, A287762
- DSODLS — A333366, A333367, A333671
- ESODLS — A309210, A309598, A309599

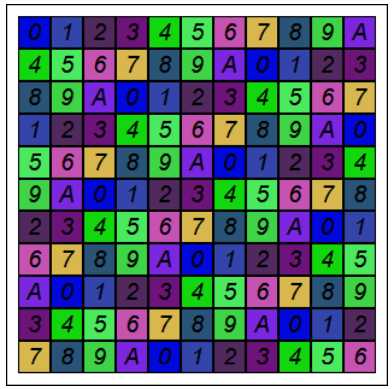
Циклические ДЛК



d=2



d=3



d=4

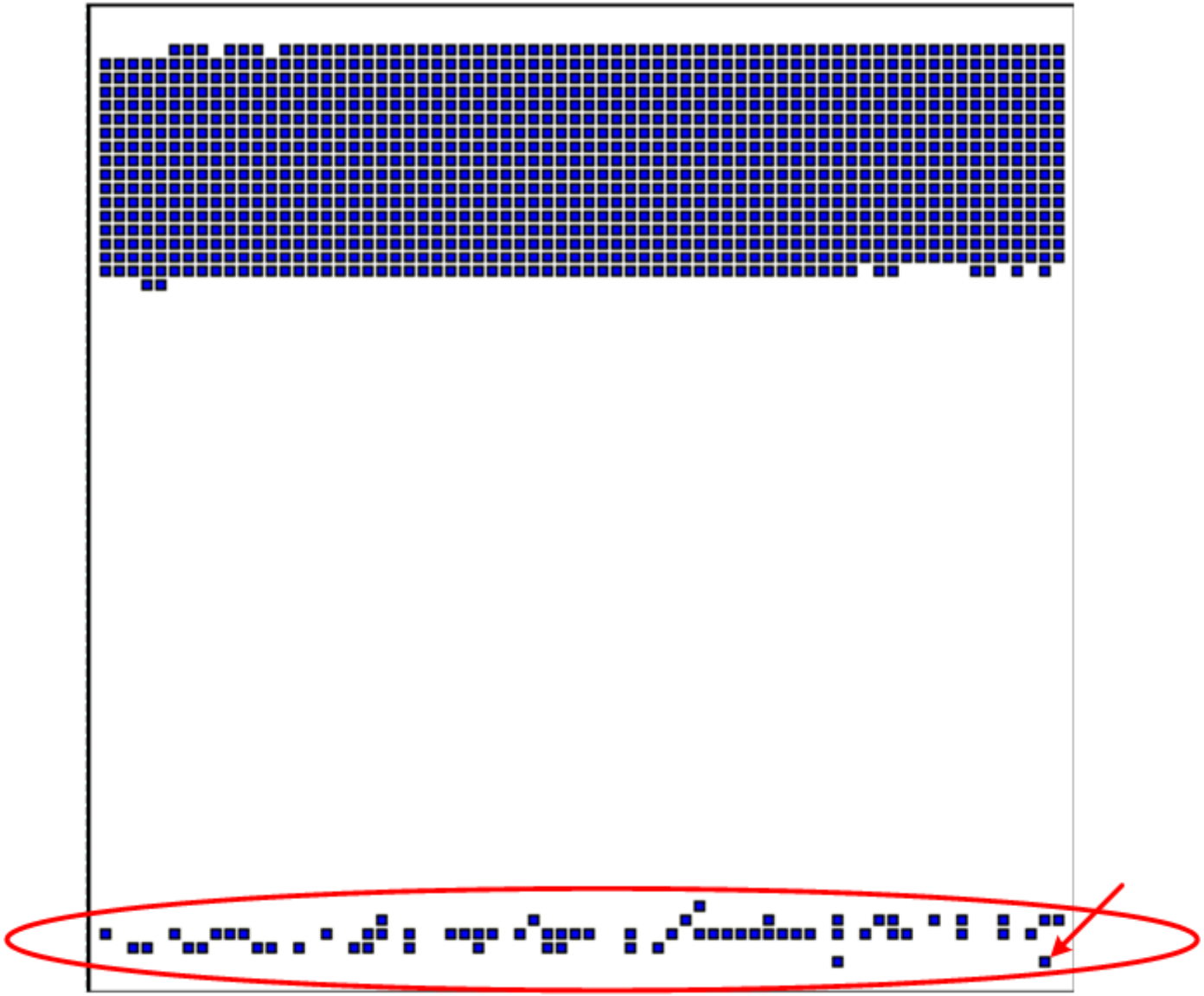
Свойства:

- существуют не для всех порядков N (например, существуют для простых порядков p);
- дважды цикличны (в двух плоскостях);
- образуют полные системы (клики) попарно-ортогональных ЛК (не все являются ДЛК);
- для некоторых порядков имеют рекордное число трансверсалей (N ∈ {5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25});
- все циклические ДЛК являются пандиагональными (обратное не верно для N>11);
- имеют связь с функцией Эйлера (последнюю можно считать путем перечисления нормализованных циклических ЛК).

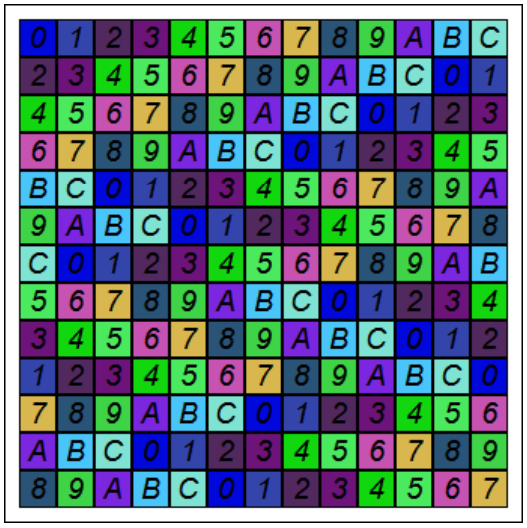
Числовые ряды в OEIS:

- циклические ЛК — A338522, A000010
- циклические ДЛК — A338562, A123565, A341585

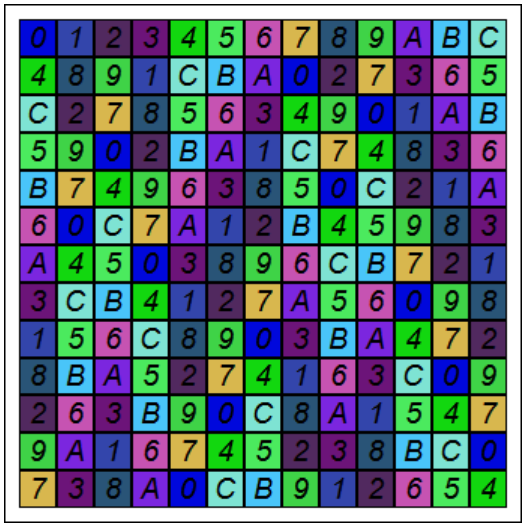
Спектр числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 11



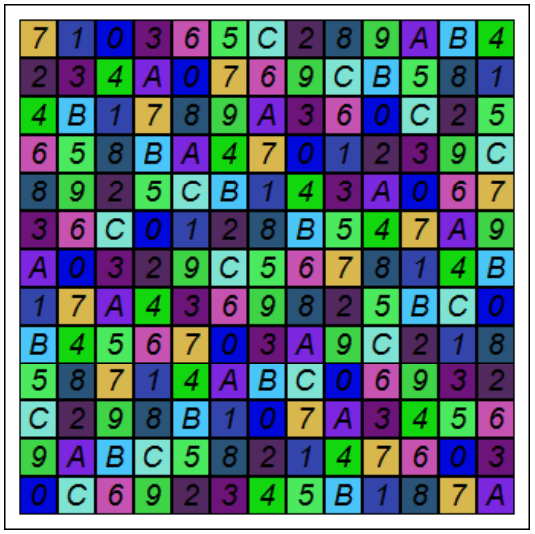
Пандиагональные ДЛК



Горизонтально полуциклический пандиагональный ДЛК



Вертикально полуциклический пандиагональный ДЛК



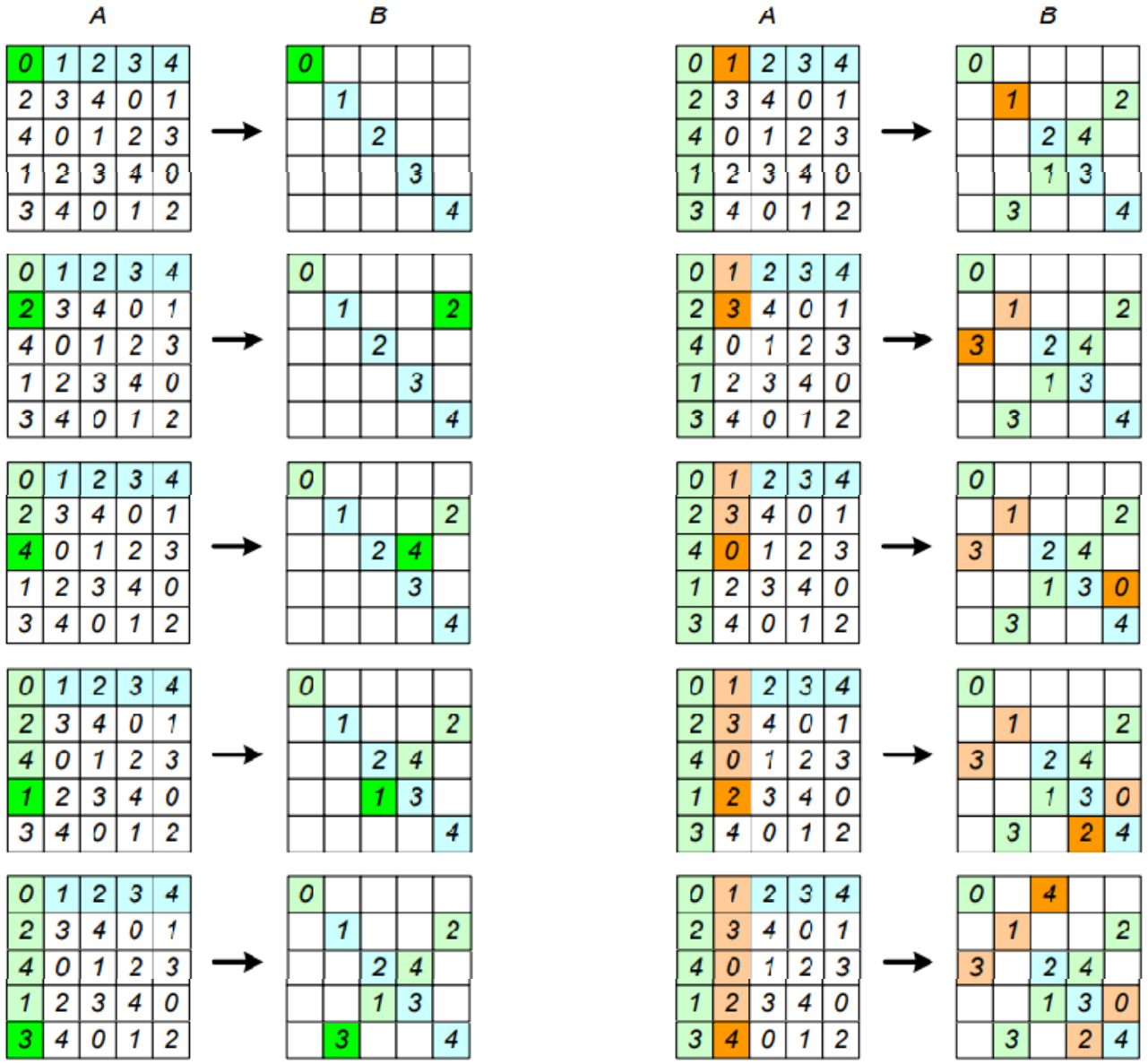
Не циклический пандиагональный ДЛК

Свойства:

- полуциклические, DxDyDv, не циклические;
- могут быть получены друг из друга поворотом на 45 градусов;
- при использовании в качестве опорных спектров дают интересный вклад в спектры.

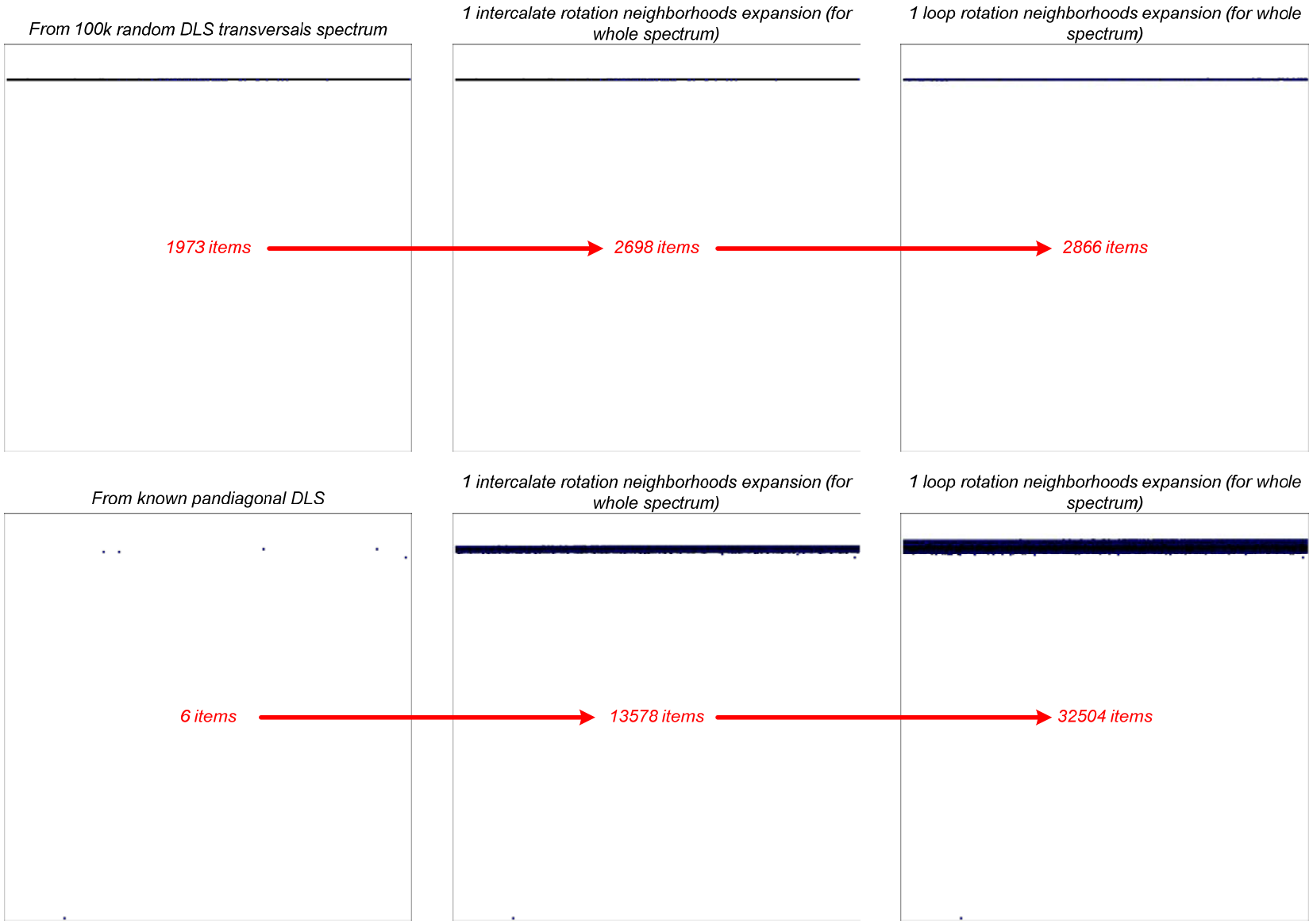
Числовые ряды в OEIS: A342306, A338620

Поворот пандиагональных ДЛК на 45 градусов



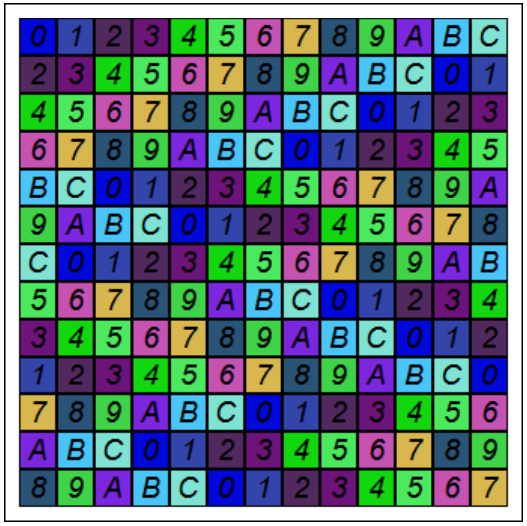
http://evatutin.narod.ru/evatutin_dls_45_degrees_rotation.pdf

Спектр числа трансверсалей в ДЛК порядка 13

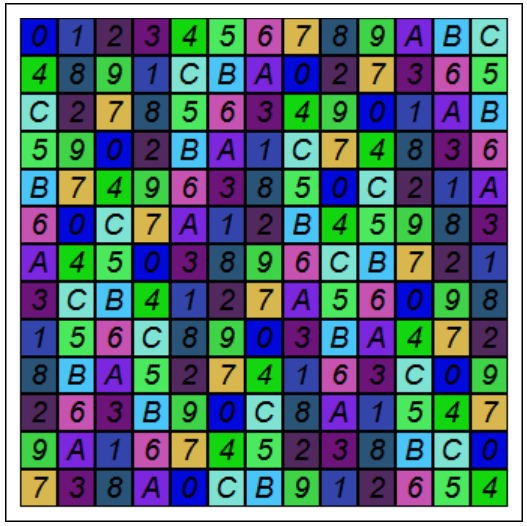


Эксперимент в настоящее время выполняется в проекте RakeSearch

Полуциклические ДЛК



Горизонтально полуциклический пандиагональный ДЛК



Вертикально полуциклический пандиагональный ДЛК

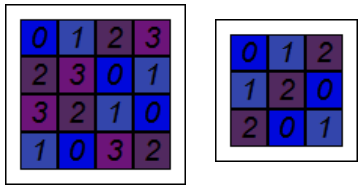
Свойства:

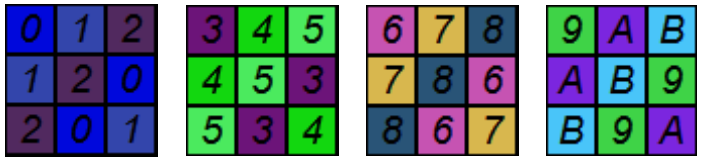
- получаются в результате перестановки строк/столбцов циклического ЛК/ДЛК;
- являются пандиагональными;
- число трансверсалей совпадает для всех, имеют большое число диагональных трансверсалей;
- путем поворота на 45 градусов получаются главно-диагонально-(полу)циклические и побочно-диагонально-(полуциклические) ДЛК;
- имеют связь с отображениями циклических групп.

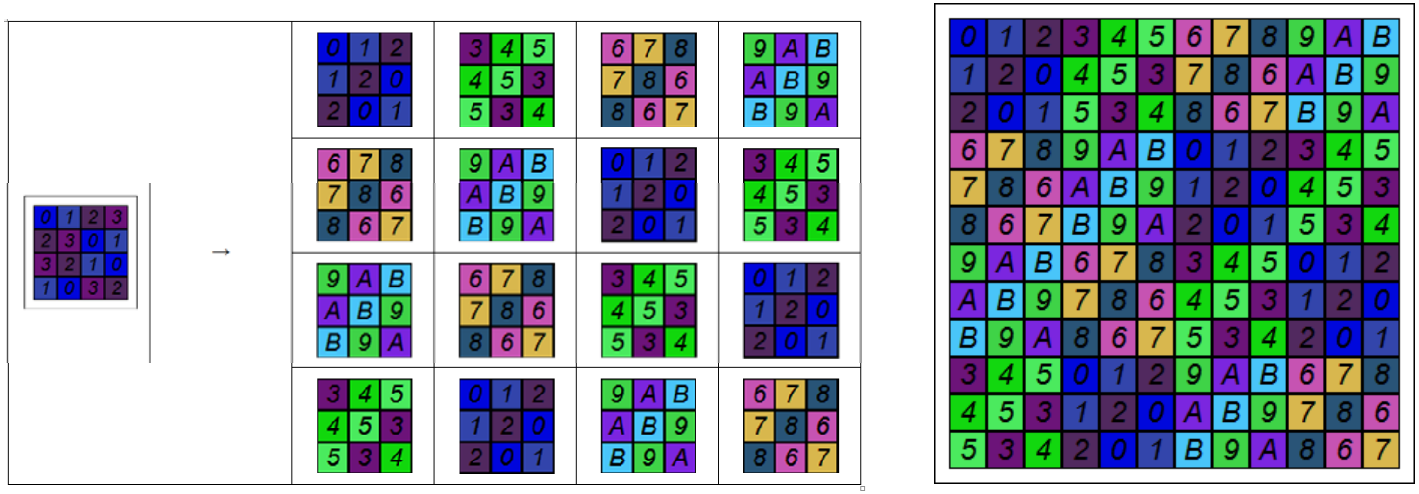
Числовые ряды в OEIS: A342990, A071607

Составные ДЛК

$$N = k_1 k_2$$





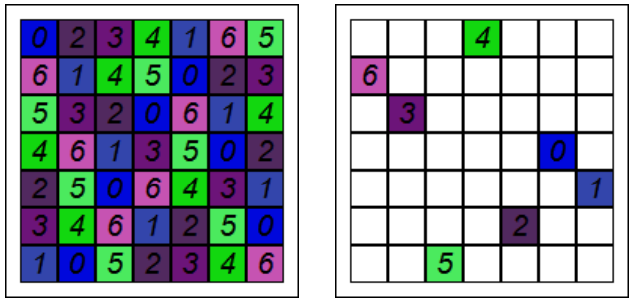


Свойства:

- скорее всего имеют связь с произведением групп;
- иногда получается ЛК, но не ДЛК (диагонализация);
- большой ДЛК наследуют свойства маленьких (ОДЛК, ДЛК Брауна, …);
- большое число (диагональных) трансверсалей (N ∈ {16, 20}, N=12 с диагонализацией).

http://evatutin.narod.ru/evatutin_dls_composite_squares_method.pdf

ДЛК по методу Пукпудн



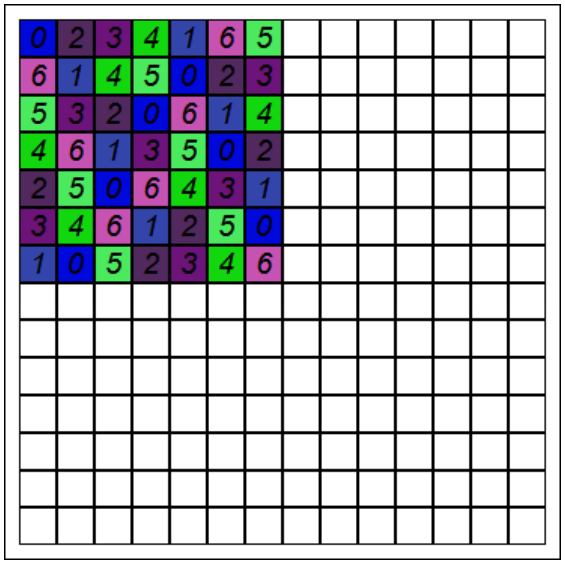
$$B = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_4 & D_3 \end{bmatrix}$$

Свойства:

- точный перевод термина на русский язык не известен, структурная единица (бодхисаттвы, чакры, рикши, Пукпудны, … :);
- из ЛК порядка N можно получить ДЛК порядков 2N и 2N+1;
- ЛК должен иметь трансверсаль на главной диагонали и трансверсаль, не пересекающую диагонали;
- вносят интересный вклад в спектры.

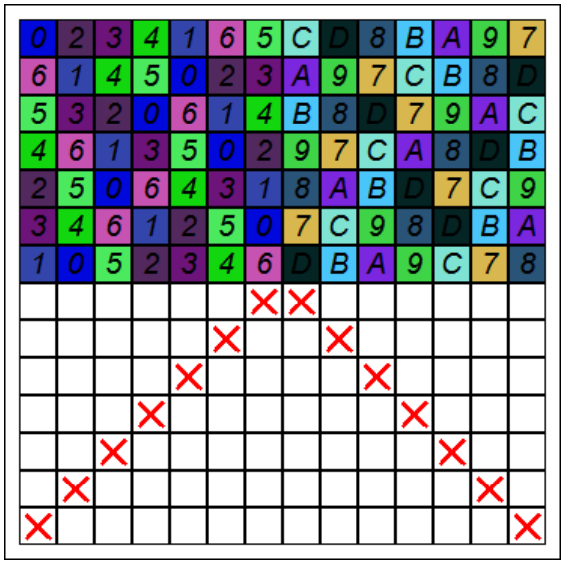
http://evatutin.narod.ru/evatutin_dls_gergely.pdf

Пример построения ДЛК по методу Пукпудн (Gergely в английской раскладке :)



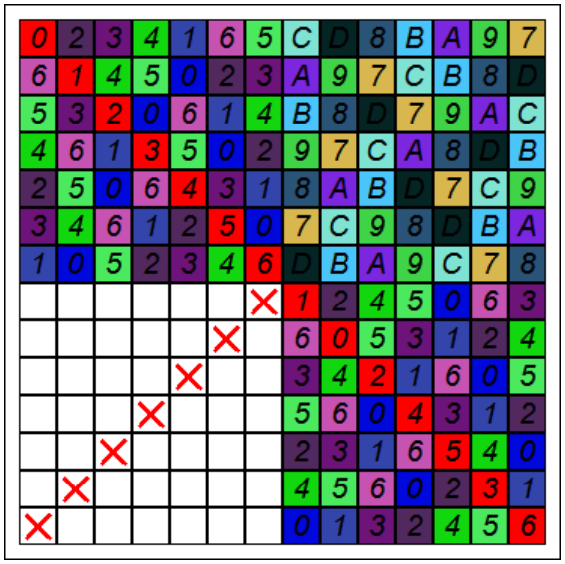
Размещение исходного квадрата в верхнем левом углу

Пример построения ДЛК Гергели



Отражение квадрата по горизонтали, увеличение значений на N

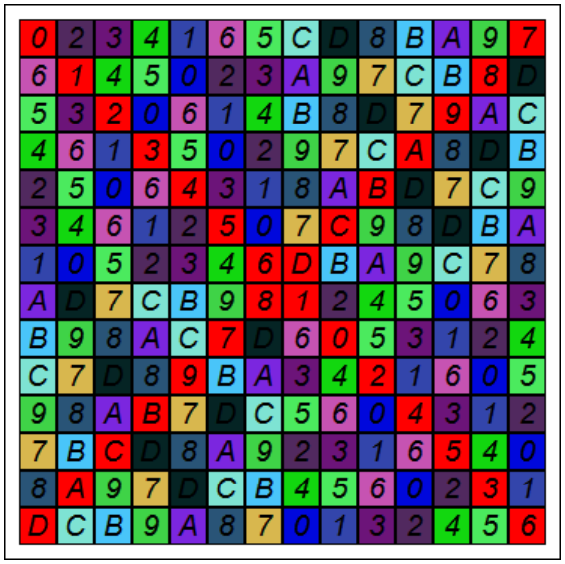
Пример построения ДЛК Гергели



$$P_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Замена значений $D_3 = P_1(D_1)$

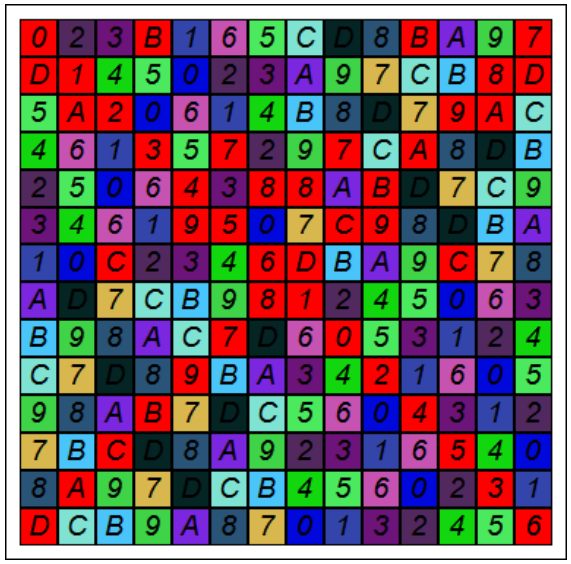
Пример построения ДЛК Гергели

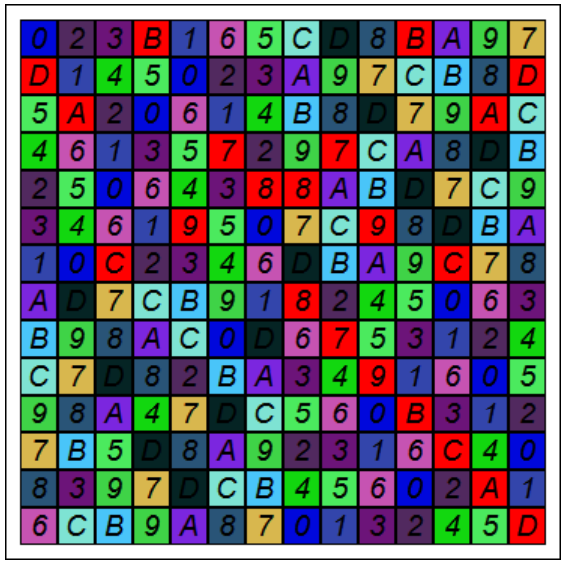


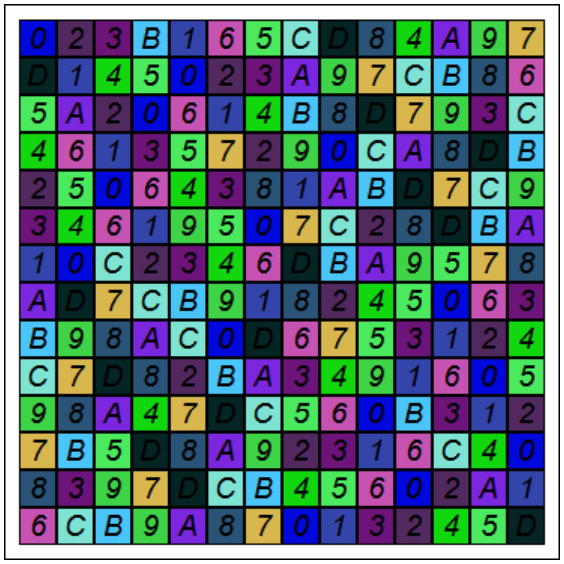
$$P_2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 & A & B & C & D \\ 8 & 7 & 9 & B & C & A & D \end{pmatrix}$$

Замена значений $D_4 = P_2(D_2)$

Пример построения ДЛК Гергели







Замена значений на диагоналях и трансверсалях

Спектр числа диагональных трансверсалей в ДЛК порядка 13

200k random centrally symmetric DLS

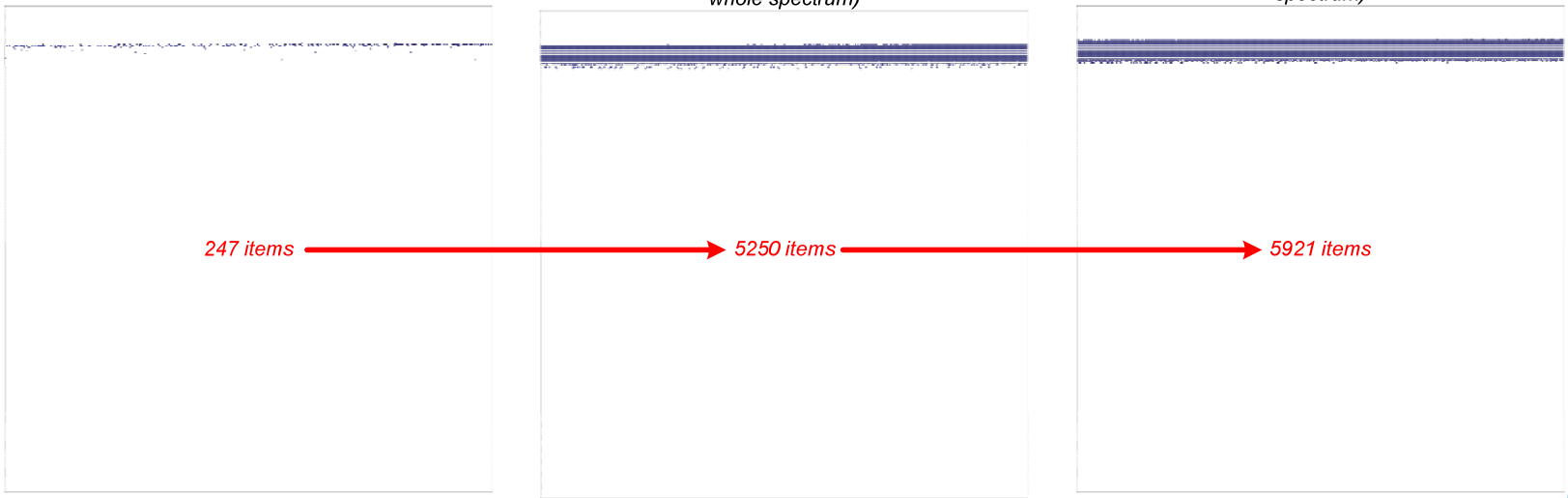
1 intercalate rotation neighborhoods expansion (for whole spectrum)

1 loop rotation neighborhoods expansion (for whole spectrum)

Pukpudn DLS

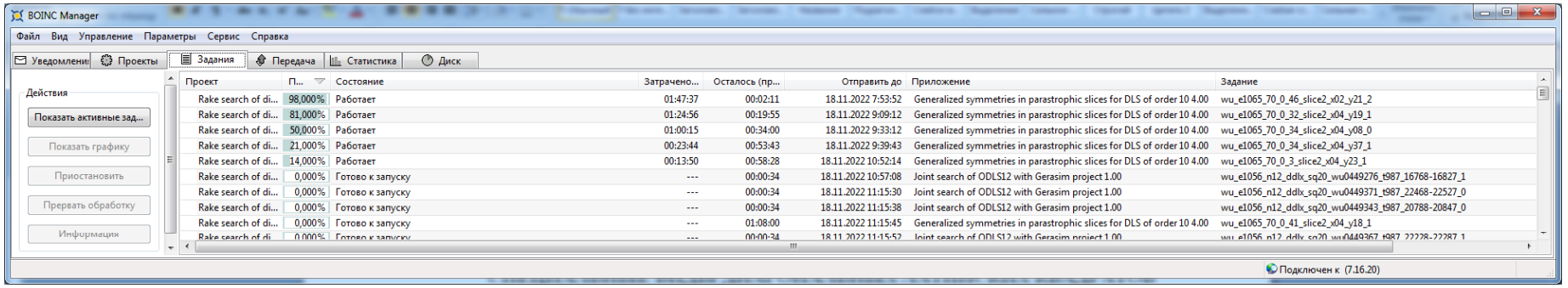
1 intercalate rotation neighborhoods expansion (for whole spectrum)

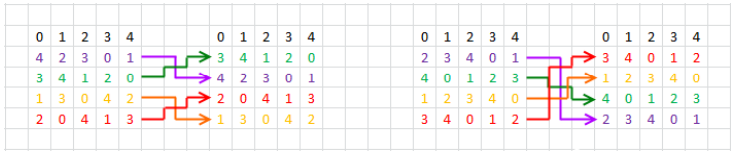
1 loop rotation neighborhoods expansion (for whole spectrum)



Перспективы дальнейших исследований

- построение аппроксимаций спектров ДЛК (порядков N>12) и ОДЛК (порядков N>9);
- более подробное исследование свойств ДЛК специального вида (нижние/верхние ограничения на значения членов числовых рядов, новые числовые ряды).





Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам, принимающим участие в проектах добровольных распределенных вычислений Gerasim@home и RakeSearch!

WWW: http://evatutin.narod.ru, https://gerasim.boinc.ru,
https://rake.boincfast.ru/rakesearch/
E-mail: evatutin@rambler.ru