

УДК 681.3

Д.В. Колясников, Э.И. Ватутин

dimon-ares@rambler.ru, evatutin@rambler.ru

Юго-Западный государственный университет, г. Курск

АНАЛИЗ СТЕПЕНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОПТИМУМУ ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В работе приведено описание вычислительных экспериментов, целью которых является оценка хроматического числа для заданного графа и ее сопоставление с точным значением.

Одной из задач в области теории графов является задача отыскания минимальной раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, $|A| = N$ – множество вершин, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$, $|V| = M$ – множество ребер, $\forall v_i = (a_{j_{нач}}, a_{j_{кон}}) \in V : (a_{j_{нач}} \in A) \wedge (a_{j_{кон}} \in A)$. Под раскраской понимается такое сопоставление числовых оценок («цветов») $c(a_i)$ вершинам графа, что ни одна пара смежных вершин не имеет совпадающих цветов: $\forall a_i, a_j \in A, i \neq j, c(a_i) = c(a_j) : \exists (a_i, a_j) \in V$. Минимальное число цветов, необходимое для раскраски заданного графа, называется хроматическим числом $\chi(G)$. Поставленная задача относится к классу NP и не позволяет отыскание оптимального решения (или, в зависимости от постановки, точного значения хроматического числа) за полиномиальное время (при условии $P \neq NP$), поэтому на практике для ее решения применяются различные эвристические алгоритмы.

Оптимальное решение поставленной задачи может быть получено методом полного перебора, однако его применение на практике существенно ограничено из-за высокой асимптотической временной сложности $O(N^N)$. Сложность перебора можно снизить путем использования полиномиально вычисляемых верхних и нижних оценок для хроматического числа $\chi_{\min} \leq \chi(G) \leq \chi_{\max}$, однако в общем случае это не спасает от NP -полноты.

Для решения поставленной задачи можно использовать различные эвристические подходы: жадный – вершины поочередно окрашиваются в минимально возможный цвет отталкиваясь от цветов смежных с ними вершин; раскраска с учетом степеней вершин начиная с вершины с максимальной степенью (числом смежных вершин) и поочередно раскрашивая еще не рассмотренные смежные с ней вершины; раскраска вершин, отсортированных в порядке уменьшения их степеней.

Для оценки качества различных алгоритмов раскраски был организован вычислительный эксперимент, в рамках которого было реализовано отыскание минимальных раскрасок и вычисление хроматического числа для выборки из 60 графов размерностью $N = 7$ вершин. При этом матрицы смежности графов формировались случайным образом, вероятность наличия

дуги между парой вершин $\alpha = 0,9$. Результаты экспериментов приведены в таблице.

Таблица. Результаты вычислительного эксперимента

Метод	Усредненная по выборке оценка хроматического числа, найденная указанным методом	Время поиска решения, с
Полный перебор	3,32	110
Перебор с использованием верхней и нижней оценок	3,32	7,32
Жадный	3,48	0,001
По вершине с наибольшей степенью	3,47	0,002
С сортировкой вершин по убыванию степени	3,35	0,002

Прежде всего следует отметить, что использование ограничений на хроматическое число существенно снижает время перебора (в 15 раз для выбранных условий эксперимента), что несколько расширяет сферу применения метода. Программная реализация жадного алгоритма характеризуется минимальным временем поиска решения и наихудшим качеством (в среднем на 4,8% хуже). Эвристические методы, основанные на учете степеней вершин, работают приблизительно в 2 раза дольше жадного, но обеспечивают более близкие к оптимуму оценки хроматического числа (отличие в худшую сторону на 4,5% и 0,9% соответственно).

В перспективе дальнейших исследований планируется получение оценок вероятностей получения оптимального решения для каждого из методов и исследование качества решений для различных значений N и α .