А.О. Пшеничных, С.Н. Гвоздева, В.С. Панищев, Э.И. Ватутин

О ВЛИЯНИИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫБОРА МИНИМАЛЬНО ДОПУСТИМОГО ИЛИ СЛУЧАЙНОГО ЦВЕТА ДЛЯ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА

Россия, Курск, Юго-Западный государственный университет

В данной работе приводится описание влияния выбора случайного или минимально допустимого цвета для выбранной вершины эвристического метода случайного перебора в задаче поиска квазиоптимальной раскраски неориентированного графа. Для разработанных программных реализаций приведены оценки временных затрат и сравнение качества полученных решений.

Существует разнообразные практические задачи, которые допускают сводимость к задачам теории графов [1]. Одна из таких – раскраска вершин графа в минимальное количество цветов. Она находит применение в ряде прикладных задач: составление расписаний, компиляция программ, решение головоломки Судоку, решение задач на базе латинских квадратов, поиск разбиений графов и т.д. Многие другие известные задачи дискретной комбинаторной оптимизации допускают полиномиальную сводимость к ней. Данная задача относится к классу *NP* и не допускает получение точного решения за разумное время для задач практически важной размерности, поэтому нахождение наиболее подходящего для выбранной задачи эвристического метода, дающего неплохое качество решение за минимальные временные затраты, является актуальной задачей [1, 2].

Указанная задача формулируется следующим образом: необходимо найти раскраску неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$ в минимальное количество цветов, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ – множество вершин графа, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер, $M = |V|$ – общее число рёбер. В некоторых случаях граф может не быть полносвязным, что соответствует отсутствию связей между некоторыми парами вершин, при этом он характеризуется значением плотности $d(G) = \dfrac{M}{N(N-1)}$ (данная характеристика является важной в связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве, одной из координат которого в задачах на графах является плотность $d(G)$ этого графа [1–3]). Необходимо найти такой набор цветов $X = \{x(a_1), x(a_2), \ldots, x(a_N)\}$ (раскраску) для каждой вершины графа a_i, $x(a_i) \in C$, из множества цветов $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\chi^*}\}$, чтобы $\chi^* = |C| \to \min$, причём смежные вершины графа не могут быть раскрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}) : x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$. В случае нахождения оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, а в случае нахождения суб- или квазиоптимальной – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$.

Для программной реализации данного метода необходимо вычислить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть раскрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильной раскраски, в этом случае такие цвета будем считать допустимыми (при нарушении условий поставленной задачи

– недопустимыми). Для проверки работы метода берётся выборка из K графов $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_K\}$ и оценивается усреднённое качество решения $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{K} Q(G_i)}{K}$, где $Q(G_i)$ – качество i-го решения и равное $\chi(G_i)$, обычно оно больше оптимума $\bar{Q} > Q^*$.

Стратегия метода случайного перебора (англ. Random Search, сокр. RS) заключается в выборе случайного направления движения из текущей вершины в дереве комбинаторного перебора [1], причём возможные направления движения выбираются равновероятно из множества допустимых. Получаемое при этом решение соответствует одной из ветвей комбинаторного дерева, не являясь в общем случае ни жадным, ни оптимальным. Далее процесс отыскания случайного пути повторяется $C_{\max}$ раз (обычно $C_{\max} \ll N!$ для большинства практически важных задач), а из найденных решений выбирается наилучшее.

В простейшей реализации данного метода вершины перебираются последовательно в том порядке, в каком они указаны в графе. В процессе разработки алгоритма было предложено реализовать следующие способы обхода вершин неориентированного графа:

1. В порядке уменьшения степеней вершин: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается вершина a_i, имеющая больше остальных связей с другими вершинами в матрице смежности $\rho(a_i) \to \max$ (наибольшее возможное значение степени вершины $\rho(a_i) \le N-1$), ей присваивается случайный допустимый c_j.
2. В порядке возрастания количества допустимых цветов вершины: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается такая вершина a_i, у которой имеется наименьшая мощность множества допустимых цветов $X(a_i) \subseteq X$, ей присваивается случайный допустимый цвет c_j.

В связи с тем, что при этих вариациях перебора вершин может возникнуть ситуация, когда у нескольких вершин будет одинаковое значение степени либо количество допустимых цветов, было решено ввести дополнительный параметр метода: η – вероятность выбора минимально допустимого или случайного цвета для текущей вершины [4]. Также была опробована возможность дополнительной сортировки вершин при переборе по их степеням: из пары вершин с одинаковой степенью предпочтительной будет та, которая имеет больше связей с уже окрашенными [5, 6].

Зависимости средневыборочного хроматического числа χ^* и времени получения решения t от параметра η приведены на рис. 1 и 2. Вычислительный эксперимент проводился для $K = |\Lambda| = 250$ случайных графов выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0{,}777$, используя количество итераций $C_{\max} = 1000$ (здесь RS_M1 – порядок перебора вершин по минимуму доступных цветов с последовательным назначением N цветов первой вершине; RS_Max01 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине; RS_Max11 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине и применением дополнительной сортировки.

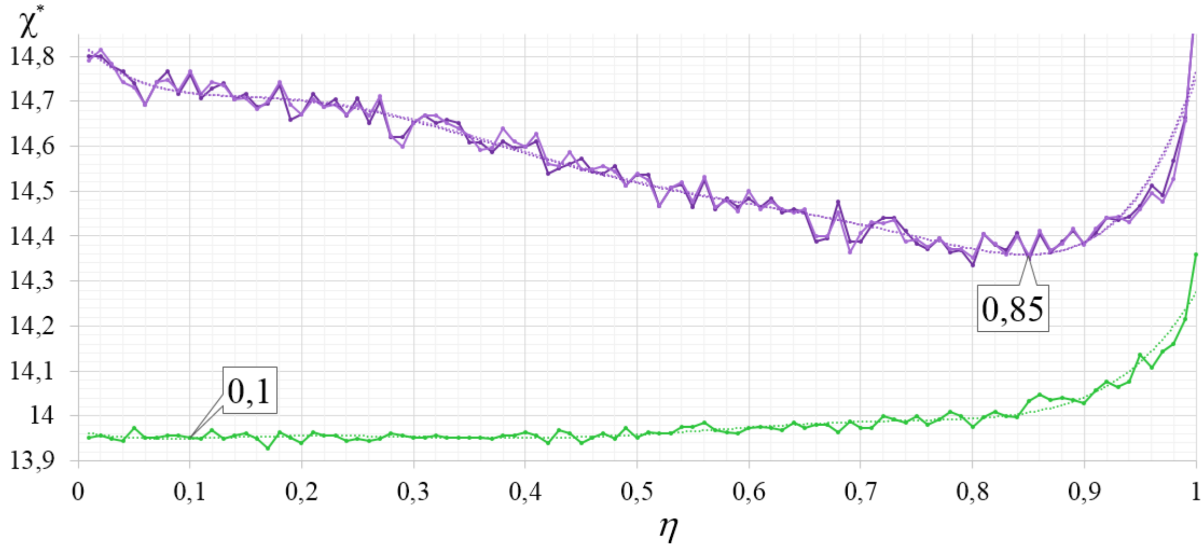

Рис. 1. Зависимость усреднённого качества решений χ^* от параметра η

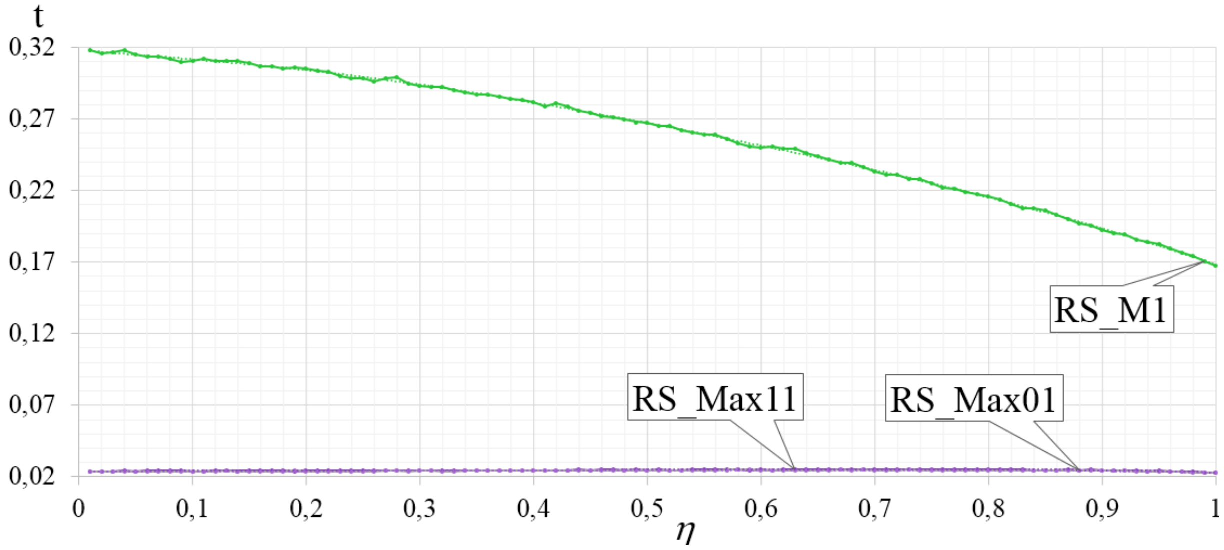

Рис. 2. Зависимость времени нахождения решений от параметра η

В ходе проверки получены оптимальные значения параметра для данных реализаций: для RS_Max01 и RS_Max11 находится в диапазоне $\eta^* \in [0,8;0,9]$ и было выбрано $\eta^* = 0,85$, для RS_M1 случайная составляющая при выборе вершины оказывает бóльшее влияние на качество, чем жадная, т.о. за оптимальное значение принято $\eta^* = 0,1$. Gr_Max01 и Gr_Max11 практически не имеют расхождений по качеству решения, однако по сравнению с Gr_M1 дают ухудшение качества на $\approx 3\%$ при полученных оптимальных значениях параметра. Для перебора по степеням вершин влияние параметра на качество решения является более выраженным, чем при переборе по минимуму допустимых цветов, что обуславливается тем, что перебор по минимуму допустимых цветов находится наиболее близко к предполагаемому оптимуму.

Для перебора по минимуму цветов временные затраты снижаются в ≈ 2 раза при использовании жадного выбора по сравнению со случайным. Дополнительная сортировка при переборе по степеням вершин не оказывает влияния ни на качество получаемых решений, ни на время их генерации.

Литература

1. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 270 с.

2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.

3. Vatutin E.I., Valyaev S.Yu., Titov V.S. Comparison of Sequential Methods for Getting Separations of Parallel Logic Control Algorithms Using Volunteer Computing // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Second International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC: FAST 2015). Vol. 1502. Technical University of Aachen, Germany, 2015. pp. 37–51.

4. Пшеничных А.О., Ватутин Э.И. Влияние вероятности выбора минимального допустимого или случайного цвета для жадного метода оценки хроматического числа графа // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2019). Самара: изд-во Самарского научного центра РАН, 2019. С. 348–351.

5. Ватутин Э.И., Леонов М.Е. Использование смежной окрестности при жадном последовательном формировании блоков разбиения граф-схем параллельных алгоритмов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 6. С. 30–35.

6. Ватутин Э.И., Бобынцев Д.О., Романченко А.С. Исследование влияния частичного упорядочивания пар и локального улучшения окрестности пары на качество расписаний при использовании жадного подхода // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2014. № 1. С. 8–16. ISSN 2223–1536.