А.О. Пшеничных, Э.И. Ватутин

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ МЕТОДА ВЗВЕШЕННОГО СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА В ЗАДАЧЕ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА

Россия, Курск, Юго-Западный государственный университет

В данной работе приводится анализ результатов работы эвристического метода взвешенного случайного перебора в задаче поиска квазиоптимальной раскраски неориентированного графа. Для разработанных программных реализаций приведены оценки временных затрат и сравнение качества полученных решений.

Существует большое количество практических задач, которые можно свести к задачам теории графов. Одна из известных задач – раскраска вершин графа в минимальное количество цветов. Она может применятся в ряде прикладных задач (составление расписаний, решение Судоку, составление латинских квадратов и комбинаторных структур на их базе, разбиений графов и т.д.), многие другие известные задачи дискретной комбинаторной оптимизации допускают полиномиальную сводимость к ней. Данная задача относится к классу *NP* и не допускает получение точного решения за разумное время для задач практически важной размерности, поэтому нахождение подходящего эвристического метода, дающего неплохое качество решение за минимальное время, является актуальной задачей [1, 2].

В данной работе основное внимание уделено анализу возможностей метода взвешенного случайного перебора [1, 3] на примере решения задачи раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$ в минимальное количество цветов, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ – множество вершин, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер, $M = |V|$ – число рёбер. В некоторых случаях граф может не быть полносвязным, что соответствует отсутствию связей между некоторыми парами вершин, при этом граф характеризуется значением «плотности» $d(G) = \frac{M}{N(N-1)}$ (данная характеристика является важной связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве (см., например, [4]), одной из координат которого в задачах на графах является плотность $d(G)$). Необходимо найти такой набор цветов $X = \{x(a_1), x(a_2), \dots, x(a_N)\}$ (раскраску) для каждой вершины a_i, $x(a_i) \in C$, из множества цветов $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{\chi^*}\}$, чтобы $\chi^* = |C| \to min$, причем смежные вершины графа не могут быть раскрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}) \colon x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$). В случае нахождения оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматические число графа G, в случае нахождения суб- или квазиоптимальной – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$. Для программной реализации данного метода необходимо вычислить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть раскрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильной раскраски.

Стратегия метода случайного перебора (англ. Random Search, сокр. RS) заключается в выборе случайного направления движения из текущей вершины в дереве комбинаторного перебора [1], причём возможные направления движения выбираются равновероятно из множества допустимых. Получаемое при этом решение соответствует одной из ветвей комбинаторного дерева, не являясь в общем случае ни жадным, ни оптимальным. Далее процесс отыскания случайного пути повторяется C_{max} раз (обычно $C_{max} \ll n!$ для большинства практически важных задач), а из найденных решений выбирается наилучшее.

Принцип работы метода взвешенного случайного перебора (англ. Weighted Random Search, сокр. WRS) [3] состоит в том, что вершине v_i присваивается случайный цвет из множества доступных цветов по определённой эвристике в зависимости от настроечного параметра – диаметра разброса D, которая определяется как

$$F = f_i\big(1 + 2D(r_k - 0{,}5)\big), \tag{1}$$

где f_i – локальная оценка качества решения – применения i-го цвета для j-ой вершины (представляет собой сумму доступных цветов для смежных выбранной нераскрашенных вершин), D – величина относительного разброса значений вблизи локальной жадной оценки, r_k – очередное псевдослучайное число с равномерным распределением на отрезке [0;1]. Минимальное значение критерия F будет соответствовать выбранному направлению движения.

При практической программной реализации метода WRS была разработана возможность изменения порядка следования вершин:

1) в том порядке, в каком они указаны в графе;

2) в случайном порядке;

3) в порядке по критерию минимума доступных цветов вершин [5]: среди всех нераскрашенных вершин выбирается такая вершина a_k, для которой доступно наименьшее количество цветов $x(a_k)$, для неё присваивается случайный из доступных цветов.

В связи с тем, что все вышеуказанные методы – итерационные, процедуру поиска раскраски следует выполнить C_{max} раз и выбрать лучшее решение. Для методов с настроечными параметрами, к которым относится метод взвешенного случайного перебора, перед их применением необходимо произвести метаоптимизацию – подобрать такой набор этих параметров, при котором будет обеспечиваться наилучшее качество решений. Все последующие вычисления проводились для графов размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0{,}777$.

В методе WRS присутствует один настроечный параметр – диаметр разброса D. Ниже приведены графики зависимости качества решения метода WRS и время его работы от параметра диаметра разброса D в пределах от 0 до 20 с количеством итераций $C_{max} = 200$, для одной точки графика было проверено $|\Lambda| = 250$ случайный графов выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой, полученная оценка хроматического числа является усредненной по выборке.

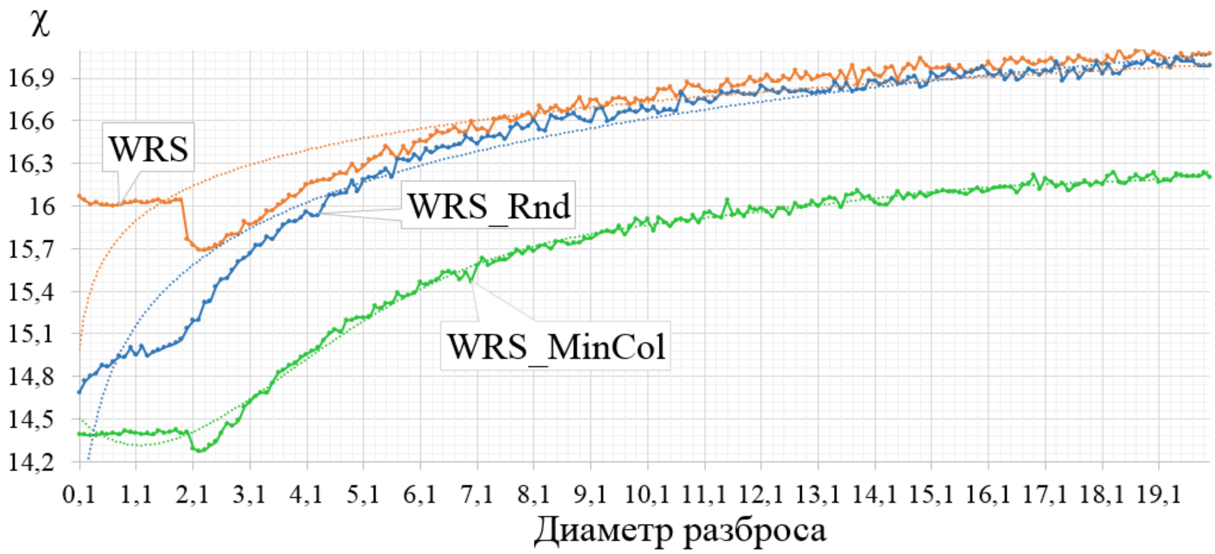

Рис. 1. Зависимость усредненного качества решений χ^* метода WRS от диаметра разброса $D \in [0; 20]$

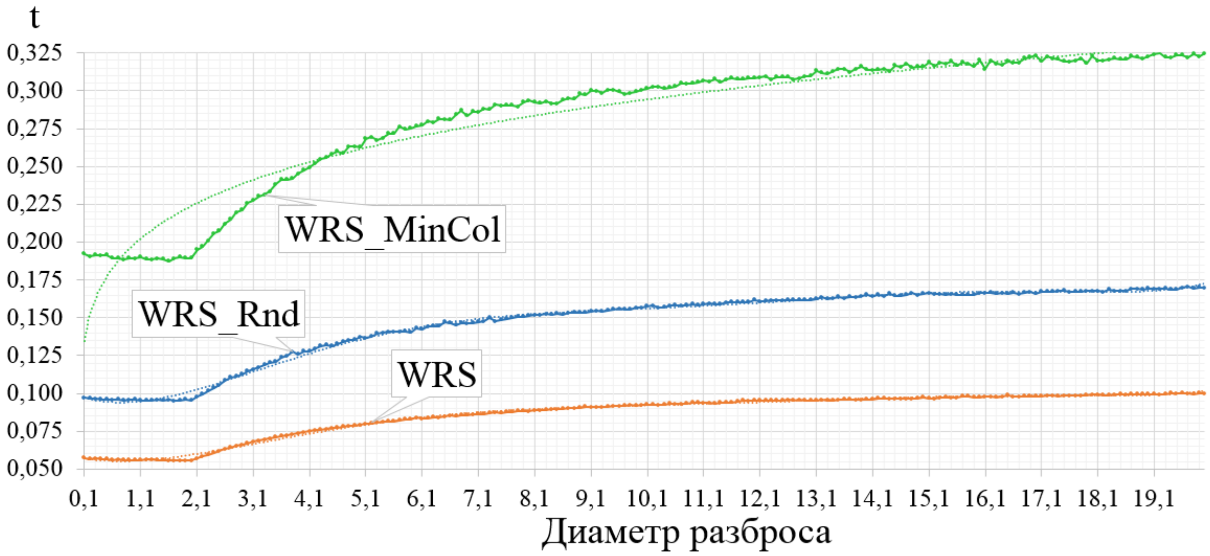

Рис. 2. Зависимость времени поиска решений t для метода WRS от $D \in [0; 20]$

На графике WRS – метод с выбором вершин графа в том же порядке, в каком они следуют в графе; WRS_rnd – метод со случайным выбором вершины; WRS_MinCol – метод с выбором вершины с минимальным количеством доступных вершин из ещё не раскрашенных.

Анализа полученных результатов позволяет сделать вывод, что для каждой вариации выбора вершины метод ведёт себя по-разному, а также оптимальное значение настроечного параметра разброса D различно. Лучшее качество при настройке диаметра разброса показала модификация WRS_MinCol на всём интервале проверки, однако время получения решений заметно больше других, что объясняется бо̀льшим количеством выполняемых действий за одну итерацию метода, т.к. необходимо находить количество доступных цветов каждой вершины. Для получения более точного значения этого параметра была проведена уточненная проверка на интервале $0 \leq D \leq 4$, ее результаты представлены на рис. 3 и рис. 4.

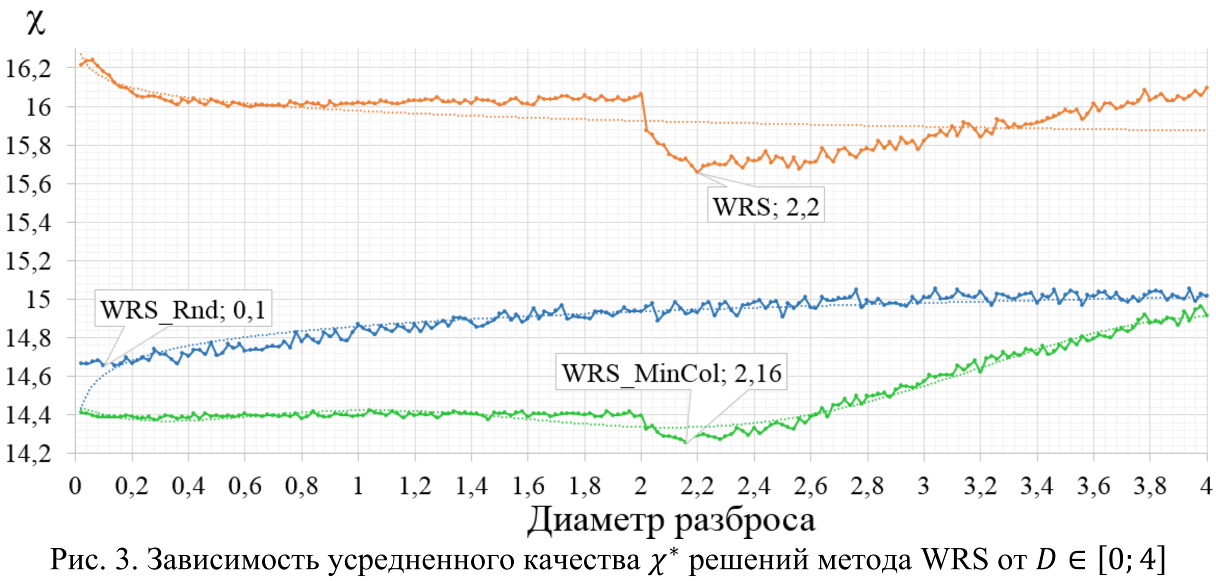

Рис. 3. Зависимость усредненного качества χ^* решений метода WRS от $D \in [0; 4]$

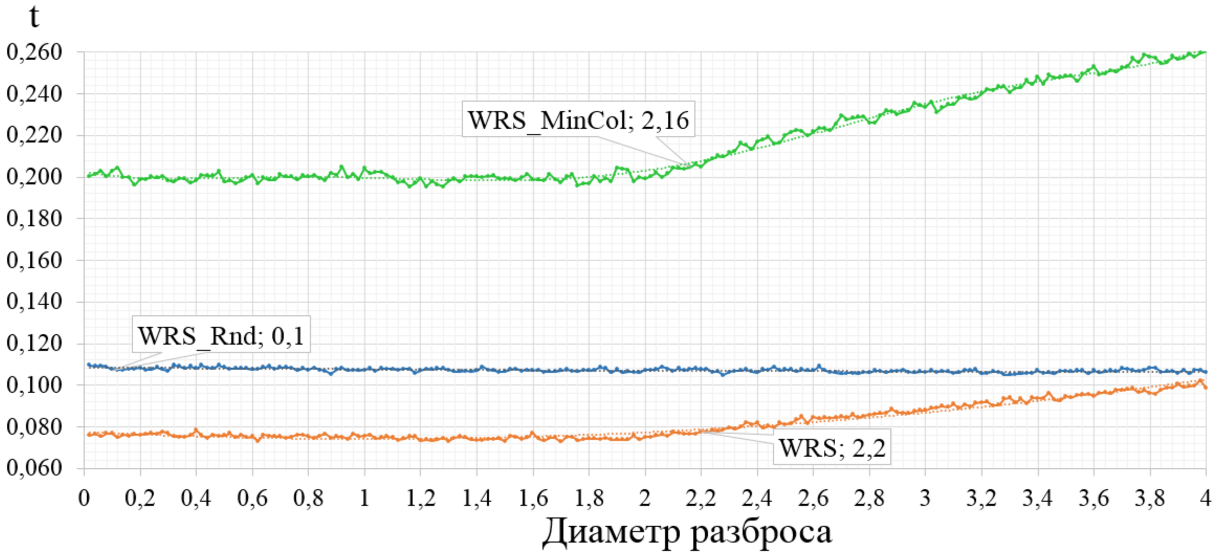

Рис. 4. Зависимость времени t получения решения для метода WRS от $D \in [0; 4]$

Для реализаций методов WRS и WRS_MinCol есть точка минимума на интервалах при $D = 2{,}2$ и $D = 2{,}16$ соответственно; для метода со случайным порядком вершин диаметр разброса не оказывает существенного влияния на качество решения и при малом значении параметра D наблюдается небольшое улучшение, за оптимальное значение было принято $D = 0{,}1$.

С целью анализа скорости сходимости данного метода была проведена проверка подходящего количества итераций C_{max} для обеспечения приемлемого соотношения качества к времени решения, ее результаты представлены на рис. 5 и рис. 6 (для параметра D были взяты значения, полученные в ходе метаоптимизации, интервал изменения числа итераций $1 \leq C_{max} \leq 200$, для одной точки графика было проверено $|\Lambda| = 250$ графов с псевдослучайной структурой, оценки усреднены по выборке).

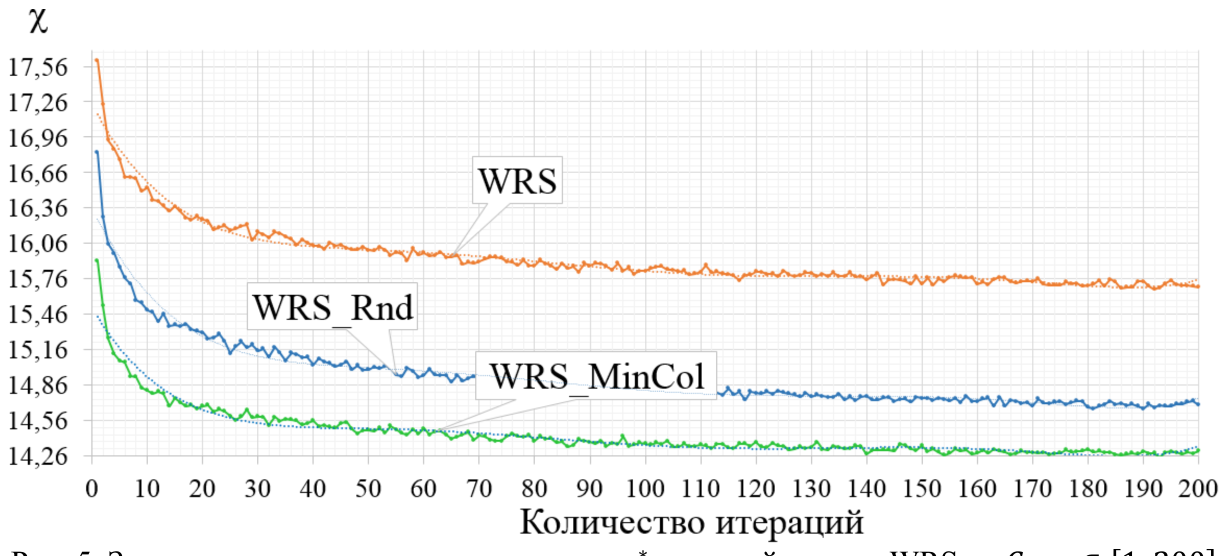

Рис. 5. Зависимость усредненного качества χ^* решений метода WRS от $C_{max} \in [1; 200]$

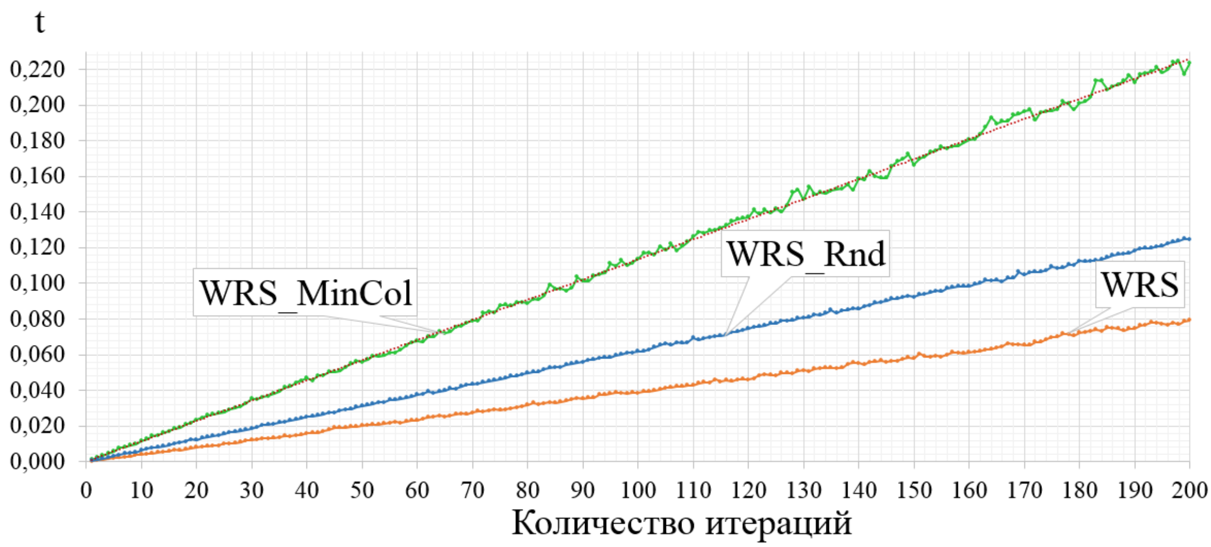

Рис. 6. Зависимость времени t получения решения для метода WRS от $C_{max} \in [1; 200]$

Увеличение числа итераций C_{max} приводит к линейному росту затрат вычислительного времени, при этом зависимость качества решения от этого параметра имеет нелинейную зависимость и темп улучшения качества решения с увеличением числа итераций значительно снижается, что позволяет на практике ограничиться некоторым разумным значением этого параметра (в приведенных примерах порядка 150–200).

Таким образом, анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что реализация WRS_MinCol показывает самое лучшее качество решений (на 9,7% лучше, чем метод WRS без вариации порядка вершин), но худшее время на поиск решений (в 2,9 раза хуже обычного WRS). Самым быстрым является метод с выбором вершины в том же порядке, в каком она идёт в графе.

В последующих работах планируется оценка качества решений других эвристических методов, увеличение интервала размера графов, на котором производился эксперимент, и попытка использовать программные реализации эвристических методов на базе GPU для методов, допускающих распараллеливание, в совокупности с оценкой сокращения временных затрат по сравнению с однопоточными реализациями на CPU.

Литература

1. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 270 с.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
3. Ватутин Э.И., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Метод взвешенного случайного перебора для решения задач дискретной комбинаторной оптимизации // Известия ВолГТУ. Серия: Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. № 10 (137). Вып. 9. 2014. с. 59–64.
4. Vatutin E.I., Valyaev S.Yu., Titov V.S. Comparison of Sequential Methods for Getting Separations of Parallel Logic Control Algorithms Using Volunteer Computing // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Second International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC:FAST 2015). Vol. 1502. Technical University of Aachen, Germany, 2015. pp. 37–51.
5. Golomb S.W., Baumart L.D. Backtrack programming // Journal of the ACM. 1965. Vol. 12. Iss. 4. pp. 516–524. DOI: 10.1145/321296.321300.