УДК 681.3

Э.И. Ватутин
evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет, Курск

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСПОЗНАВАНИЮ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

В работе предложено описание подхода, сводящего комбинаторную задачу установления факта изоморфизма графов общего вида к дискретной комбинаторной оптимизационной задаче, что позволяет использовать для ее решения известные эвристические методы.

Одной из нерешенных и практически важных задач в области теории графов, для которой неизвестен полиномиальный алгоритм решения, известны лишь попытки его создания [1], является задача проверки изоморфизма пары графов $G_1 = \langle A_1, V_1 \rangle$, $A_1 = \left\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_{N_1}^{(1)}\right\}$ – множество вершин, $V_1 = \left\{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, ..., v_{M_1}^{(1)}\right\}$ – множество дуг, и $G_2 = \langle A_2, V_2 \rangle$, $A_2 = \left\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, ..., a_{N_2}^{(2)}\right\}$, $V_2 = \left\{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, ..., v_{M_2}^{(2)}\right\}$. Общепринятой формой хранения графов является их представление в виде матрицы смежности $M(G) = \left\|m_{ij}\right\|_{N \times N}$, элементы которой в простейшем случае (неориентированные невзвешенные графы) представлены множеством значений $\{0,1\}$ в зависимости от наличия или отсутствия ребра между соответствующей парой вершин. В различных классах прикладных задач [2], сводимых к данной, существует необходимость либо в установлении факта наличия или отсутствия изоморфизма, либо в отыскании подстановки изоморфизма $\pi = A_1 \to A_2$ или перестановки $\sigma = A_1 \to A_1'$ вершин одного из графов, такой что $M(\sigma(G_1)) = M(G_2)$.

Введем в рассмотрение метрику $d(G_1, G_2) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(m_{ij}^{(1)} \oplus m_{ij}^{(2)}\right)$, где «$\oplus$» – операция сложения по модулю 2. По сути данная метрика является обобщением расстояния Хэмминга (метрики Минковского) для матриц смежности неориентированных невзвешенных графов. Очевидно, что для пары изоморфных графов $d(G_1, G_2) = 0$, а для неизоморфных $d(G_1, G_2) > 0$. С использованием данной метрики задача распознавания изоморфизма графов может быть представлена в следующей формулировке: необходимо найти такую подстановку π (или перестановку σ, что эквивалентно), что $d(G_1, G_2) \to \min$. Т.е. фактически исходную комбинаторную задачу можно свести к задаче дискретной оптимизации, для решения которой могут быть использованы известные эвристические методы. Так, например, выбрав в качестве элементарной модифицирующей операции перенумерацию *i*-й и *j*-й вершин одного из графов $\begin{array}{l}\left[a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \boldsymbol{a_i}, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, \boldsymbol{a_j}, a_{j+1}, ..., a_n\right] \to \\ \to \left[a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \boldsymbol{a_j}, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, \boldsymbol{a_i}, a_{j+1}, ..., a_n\right]\end{array}$ в составе перестановки σ, можно потребовать, чтобы в результате выполнения очередной перенумерации выполнялось соотношение $d\left(\sigma_k\left(G_1\right), G_2\right) \geq d\left(\sigma_{k+1}\left(G_1\right), G_2\right)$, где σ_{k+1} – перестановка на k-й итерации работы алгоритма, что эквивалентно жадному подходу. Разрешив выполнение перенумераций при условии $\left(\Delta d_k < 0\right) \vee \left[\left(\Delta d_k \geq 0\right) \wedge \left(r_k > e^{-\frac{\Delta d_k}{T_k}}\right)\right]$, где $\Delta d_k = d\left(\sigma_{k+1}\left(G_1\right), G_2\right) - d\left(\sigma_k\left(G_1\right), G_2\right)$, T_k – текущая температура, r_k – очередное псевдослучайное число, исходная задача может быть решена методом имитации отжига. Аналогичным образом могут быть использованы и другие известные эвристические методы, такие как взвешенный случайный перебор, методы на базе группового интеллекта (имитация поведения муравьиной или пчелиной колонии), перебор с ограничением глубины, генетические методы и пр.

При решении задачи проверки изоморфного вхождения подграфа в граф значение N в метрике $d\left(G_1, G_2\right)$ выбирается как $N = \min\left(N_1, N_2\right)$, что, например, при $N_1 > N_2$, приводит к сопоставлению верхней левой подматрицы размером $N_2 \times N_2$ элементов матрицы смежности $M\left(G_1\right)$ с матрицей смежности $M\left(G_2\right)$. При выборе $0 < N < \min\left(N_1, N_2\right)$ минимизация предлагаемой метрики соответствует задаче поиска общего изоморфного подграфа $\tilde{G}$ из N вершин.

С использованием рассмотренной выше метрики $d\left(G_1, G_2\right)$ возможно построение разбиения множества графов на классы эквивалентности с определением попарных расстояний между ними. В задачах, возникающих при разработке геоинформационных систем [1], предложенная метрика может быть использована для сопоставления графов, соответствующих различным городским территориям, с целью исключения влияния возможных ошибок при распознавании элементов ГИС, что может иметь место при оценке «точного» изоморфизма.

---

1. Еремеев С.А. Алгоритм поиска топологически схожих городских территорий в геоинформационных системах // Распознавание – 2013. Курск, 2013. С. 389–391.
2. Валяев В.В., Ватутин Э.И. Метод определения изоморфизма графов общего вида за полиномиальное время // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. № 2. Ч. 1. 2012. С. 200–206.