УДК 681.3
Е.Н. Дремов, Э.И. Ватутин
evgeni-dremov@yandex.ru, evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет, г. Курск

СРАВНЕНИЕ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ МЕТОДОВ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ

В работе приведено описание вычислительных экспериментов, целью которых является оценка качества оптимальных и субоптимальных решений, формируемых различными методами, при нахождении кратчайшего пути между парой вершин в графе и затрат времени на их получение.

Одной из задач в области теории графов является задача поиска кратчайшего пути между парой заданных вершин $a_{нач}$ и $a_{кон}$ в графе $G=\langle A,V\rangle$, где $A=\{a_1,a_2,...,a_N\}$, $|A|=N$ – множество вершин, $V=\{v_1,v_2,...,v_M\}$, $|V|=M$ – множество дуг, $\forall v_i=\left(a_{j_{нач}},a_{j_{кон}}\right)\in V:\ \left(a_{j_{нач}}\in A\right)\wedge\left(a_{j_{кон}}\in A\right)$. В рассматриваемом случае граф является неориентированным и взвешенным, его дугам приписана длина $l(v_i)>0$. Необходимо отыскать такой путь $L=\left[a_{j_1},a_{j_2},...,a_{j_L}\right]$, $a_{j_1}=a_{нач}$, $a_{j_L}=a_{кон}$ длина которого минимальна: $l(L)=\sum_{v_i\in V_L} l(v_i)\rightarrow\min$, где $V_L=\left\{\left(a_{j_1},a_{j_2}\right),\left(a_{j_2},a_{j_3}\right),...,\left(a_{j_{L-1}},a_{j_L}\right)\right\}\subseteq V$ – множество образующих путь дуг. Минимальных путей может быть несколько, в таком случае выбирается один из них, либо пути может не быть вообще (например, если граф имеет несколько компонент связности).

Известно множество подходов к решению задачи, имеющих свои достоинства и недостатки. Так оптимальное решение поставленной задачи может быть получено полным перебором (поиск в глубину) за время порядка $O(N!)$, либо с использованием алгоритма Дейкстры за время $O(N^2)$. Также субоптимальное решение может быть получено жадным алгоритмом за время $O(N)$ и модификацией волнового алгоритма (поиск в ширину) за время $O(KN)$, где $K<N$ – расстояние между вершинами $a_{нач}$ и $a_{кон}$, выраженное в числе связывающих их дуг. При жадном подходе к отысканию решения производится построение единственного пути, причем на каждом шаге осуществляется выбор очередной вершины $a_{j_{i+1}}\in A\setminus L$, расстояние от которой до предыдущей вершины $a_{j_i}\in L$ минимально: $j_{i+1}=\arg\min_{\forall\tilde{a}\notin L} l\left(v_k=\left(a_{j_i},\tilde{a}\right)\right)$. Модификация волнового алгоритма

предусматривает построение K волн от вершины $a_{нач}$ до достижения вершины $a_{кон}$ и выбор с использованием вершин построенных волн пути с минимальной длиной. При этом производится построение некоторого подмножества из множества всех возможных путей.

На примере данной задачи становится возможным оценка потенциала эвристических методов, т.к. известны оптимальные решения.

В проведенных вычислительных экспериментах была использована выборка из 1000 графов с числом вершин $N = 10$ со случайными значениями весов $l(v_i) \in [1; 10]$, имеющими равномерное распределение. Результаты эксперимента приведены в таблице.

Таблица. Сравнение качества решений, получаемых различными методами

Метод	Средняя длина пути	Время отыскания решения
Полный перебор	3,43 ± 0,10	164x
Алгоритм Дейкстры	3,43 ± 0,10	12x
Поиск в ширину	4,99 ± 0,14	11x
Жадный алгоритм	12,18 ± 0,55	1x

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают, что алгоритм Дейкстры дает оптимальное решение за время, существенно меньшее времени, необходимого на перебор всех возможных путей. Метод поиска в ширину обеспечивает в среднем 45%-ое ухудшение качества решения по сравнению с наилучшим, причем на нахождение решения затрачивается время, сопоставимое с временем работы алгоритма Дейкстры. Жадный алгоритм является самым быстрым, но качество его решений в среднем в 3,6 раза хуже оптимума, что подтверждает нецелесообразность его применения в данной задаче.

В перспективе дальнейших исследований оценка вероятностей получения решений с минимальной длиной пути в общепринятом виде и разработка ряда новых методов, основанных на вероятностных принципах отыскания решения.