Э.И. Ватутин, В.С. Титов

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АЛГОРИТМА МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Курск, Юго-Западный государственный университет

В ряде разделов дискретной математики, таких как теория графов, исследование операций, математическое программирование и др., возникает необходимость в решении оптимизационных задач, имеющих ярко выраженный комбинаторный характер и определенных на дискретных структурах (матрицах, графах и пр.). Для некоторых из них, образующих класс *P*, доказано существование эффективных полиномиальных алгоритмов, обеспечивающих получение оптимальных решений; другие, образующие класс *NP*, по определению не имеют быстрых полиномиальных алгоритмов и решаются точно алгоритмами с экспоненциальной или факториальной временной асимптотикой. В редких случаях принадлежность задачи к тому или иному классу точно не определена, а соответствующий гипотетический полиномиальный алгоритм ее решения не известен (либо не общепризнан ввиду отсутствия доказательства его корректности), что в настоящее время также делает указанные задачи трудно решаемыми (пример подобной задачи – изоморфизм графов общего вида [1, 2]). Для решения подобных задач на практике с успехом используются различные эвристические методы, к которым относятся вариации перебора с ограничениями [3], жадные алгоритмы, вариации случайного перебора [4–6], методы на базе группового интеллекта [7, 8], генетические и эволюционные методы [9], метод имитации отжига [10, 11]. В различных задачах они демонстрируют существенно различную эффективность и отличаются по необходимым затратам вычислительного времени, возможности распараллеливания и качеству получаемых решений, в некоторых задачах при этом проявляется зонная зависимость, выражаемая в предпочтительной применимости методов в зависимости от ряда условий (размерность задачи, сила ограничений и пр.) [12, 13].

Одним из эффективных методов решения задач обозначенного класса является метод муравьиной колонии [7, 8], предложенный М. Дориго в 1992 г. Он имитирует поведение колонии муравьев, целью которых в природе является прокладка кратчайшего пути к источнику пищи, который помечается феромоном, что используется в дальнейшем для ориентации в пространстве последующих поколений муравьев. Данный метод базируется на том, что направление движения из текущей вершины определяется пропорционально вероятности

$$P_i = \frac{\eta_i^\alpha \tau_i^\beta}{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^\alpha \tau_j^\beta},\ i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $\eta_i = \frac{1}{l_i}$ – величина, обратная длине участка пути для выбранного i-го направления в рассматриваемом классе задач, τ_i – количество феромона на выбранном направлении, α и β – настроечные параметры (в [8] вместо вероятности (1) предложено использовать эвристику $\eta_i^\alpha \tau_i^\beta r_k \to \max$, где r_k – очередное псевдослучайное число, что снижает необходимое число вычислительных операций и не меняет общей логики подхода), n – число возможных направлений движения, при этом с течением времени (итераций работы алгоритма) феромон испаряется

$$\tau_i^{(t)} = \gamma\tau_i^{(t-1)} + \Delta\tau, \tag{2}$$

где $0 \le \gamma \le 1$ – настроечный параметр, регулирующий темп испарения, t – дискретное время (номер итерации), а новые пути, проложенные муравьями, помечаются дополнительной порцией феромона

$$\Delta\tau = \frac{Q}{L}, \tag{3}$$

где L – длина пройденного муравьем пути (оценка качества очередного найденного решения), Q – количество феромона у муравья, используемое для отметки пройденного пути (настроечный параметр). С течением времени дуги/ребра графа, более часто входящие в состав коротких путей, помечаются б**о**льшим количеством феромона, в противоположность этому феромон с редко используемых дуг/ребер испаряется, стремясь к нулю, что в природе обеспечивает движение муравьев по близким к оптимальным путям, а в рассматриваемым классе задач – нахождение квазиоптимального решения с достаточно высокой скоростью сходимости и в ряде случаев с достаточно малым отклонением от оптимума [8].

Данный метод обладает высокой эффективностью при решении ряда задач дискретной математики, так или иначе связанных с прокладкой путей (кратчайшие пути в графе [3, 6, 8, 11], гамильтоновы цепи и циклы [14], маршрутизация транспортных средств [15] и т.д.), когда отметка феромоном используется как дополнительный взвешивающий коэффициент ребра/дуги графа, однако при решении других комбинаторных оптимизационных задач он напрямую неприменим, т.к. в них веса дуг/ребер не играют решающей роли при построении решения. При этом существует целый ряд важных для практики задач, в которых вызывает интерес использования схожего принципа, основанного на частичном запоминании опыта, полученного при синтезе предыдущих решений. В ряде задач представляется эффективным запоминать соответствие между выбранной вершиной графа и чем-либо еще (в задаче раскраски графа – соответствие «вершина – цвет», при построении разбиений – соответствие «вершина – номер блока разбиения» [16, 17], при поиске комбинаторных объектов наподобие латинских квадратов – соответствие «выбранный элемент квадрата – позиция в квадрате» [18], при эвристической проверке изоморфизма графов – соответствие (перестановка) между вершинами графов [21] и т.д.).

Оставив решение обозначенных выше задач для будущих исследований, рассмотрим применение указанного подхода в задаче поиска кратчайшего пути между выбранной парой вершин $a_{нач}$ и $a_{кон}$ в графе $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ – множество вершин, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, ..., v_M\} \subseteq A \times A$ – множество дуг, $M = |V|$ – число дуг, $d(G) = \dfrac{M}{N(N-1)}$ – плотность графа (вспомогательная числовая характеристика). Данная задача является достаточно простой и имеет точное решение, получаемое с использованием алгоритма Дейкстры [19] за время $O(N^2)$, что позволяет ее использование в качестве тестовой для исследования качества решений различных эвристических методов [3–11]. В контексте предложенного выше подхода, основанного на запоминании соответствий, ее можно решить с использованием муравьиного подхода путем сопоставления номеров вершин и их позиций в получаемых путях, что может быть отмечено феромоном с использованием формулы (2) и схематично изображено на рис. 1.

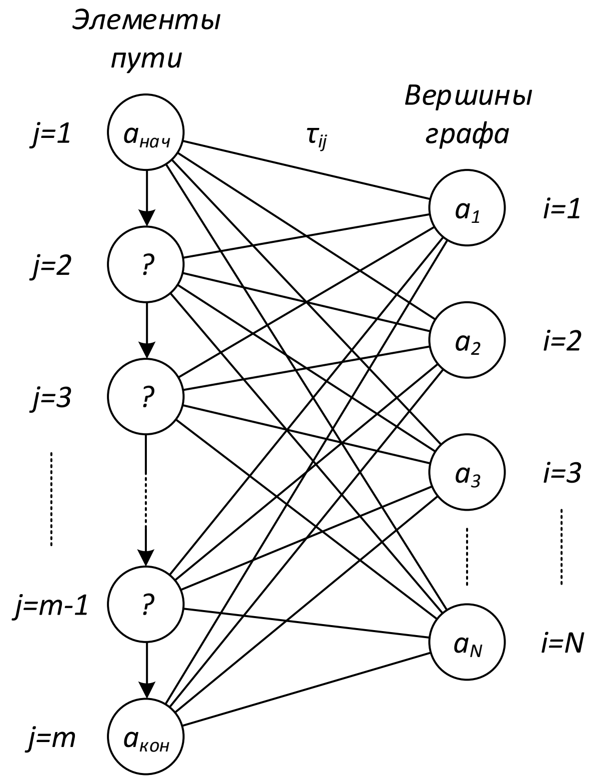

Рис. 1. Иллюстрация к соответствию вершин графа a_i и их позиций j в составе формируемого пути $P=\left[a_{нач}=a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, ..., a_{кон}=a_{j_Q}\right]$, каждое соответствие $a_i \leftrightarrow j$ помечается порцией феромона τ_{ij}, значения которого взвешивают ребра полученного двудольного графа

В рассмотренной задаче можно сравнить данный подход с классическим, базирующимся на отметке феромоном пройденных дуг/ребер графа, для чего в дополнение к программной реализации [20] были добавлены соответствующие подпрограммы, реализующие функциональность предлагаемого подхода. Следуя работам [3, 5, 6, 8, 11], сравнение качества решений было проведено на выборке $\Lambda=\{G_1, G_2, ..., G_K\}$ из K псевдослучайных матриц смежности для взвешенных неориентированных графов с априорно заданными числом вершин N и плотностью $d(G)$, длины дуг которых выбирались равновероятно из диапазона $[0;1]$. В ходе выполненных вычислительных экспериментов были выбраны следующие значения настроечных параметров алгоритма: $\alpha^*=0{,}28$, $\beta^*=0{,}35$, $Q^*=1$, $\tau^{(0)*}=100$ (начальное количество феромона), $\gamma^*=0{,}9$, $C^*=1\,000$ (число итераций), $M^*=100$ (число муравьев в колонии), полученные в ходе параметрической оптимизации, результаты сравнения качества решений приведены в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость вероятности получения оптимального решения p_{opt}^x, полученного с использованием метода x, от размерности задачи N и плотности графов d, $K=100$, $C=1\,000$. Знаком «~» отмечено совпадение качества решений предложенного подхода (AC2) с классическим (AC), «+» – превосходство над классическим подходом, «–» – отставание от классического подхода.

$N \setminus d$	$d = 0{,}01$	$d = 0{,}1$	$d = 0{,}5$	$d = 0{,}9$
$N = 10$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}01$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}32$	$p_{opt}^{AC} = 1{,}00$	$p_{opt}^{AC} = 1{,}00$
	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}01\ \sim$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}32\ \sim$	$p_{opt}^{AC2} = 1{,}00\ \sim$	$p_{opt}^{AC2} = 1{,}00\ \sim$
$N = 50$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}02$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}92$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}92$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}87$
	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}02\ \sim$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}96\ +$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}93\ +$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}88\ +$
$N = 100$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}06$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}90$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}83$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}88$
	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}06\ \sim$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}87\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}70\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}80\ -$
$N = 200$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}50$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}82$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}79$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}67$
	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}52\ +$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}78\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}72\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}68\ +$
$N = 300$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}54$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}68$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}65$	$p_{opt}^{AC} = 0{,}62$
	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}57\ +$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}65\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}55\ -$	$p_{opt}^{AC2} = 0{,}58\ -$

Полученные результаты позволяют сделать ряд выводов о применимости предложенного метода. При поиске путей для задач малой размерности $(N \le 50)$ решения классического и предложенного подходов практически совпадают, с ростом размерности вероятность получения оптимальных решений у предлагаемого подхода несколько ниже классического, при этом проигрыш в усредненном качестве решений не превышает 1–2% по абсолютному значению (длине найденных путей), что для большинства практических приложений является приемлемым. Эта незначительная негативная тенденция, по-видимому, является следствием универсальности, несомненным плюсом которой, с другой стороны, является расширение функциональных возможностей метода муравьиной колонии для решения «не путевых» комбинаторных оптимизационных задач широкого класса [16–18, 21].

Авторы статьи выражают благодарность А. Кажарову за ряд ценных уточнений и замечаний, полученных в ходе обсуждения особенностей использования муравьиных алгоритмов при решении оптимизационных задач.

Библиографический список

1. Trofimov M.I. Polynomial Time Algorithm for Graph Isomorphism Testing // arXiv:1004.1808, 2013.
2. Валяев В.В., Ватутин Э.И. Метод определения изоморфизма графов общего вида за полиномиальное время // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. № 2. Ч. 1. 2012. С. 200–206.
3. Ватутин Э.И., Мартынов И.А., Титов В.С. Анализ результатов использования метода перебора с ограничением глубины в задаче поиска кратчайшего пути в графе // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов (МППОС'15). Барнаул, 2015. С. 120–128.
4. Ватутин Э.И., Колясников Д.В., Мартынов И.А., Титов В.С. Метод случайного перебора в задаче построения разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов. Барнаул: Барнаул, 2014. С. 115–125.

5. Ватутин Э.И., Колясников Д.В., Титов В.С. Анализ результатов применения метода случайного перебора в задаче поиска разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 12 (161). С. 102–110.
6. Ватутин Э.И., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Метод взвешенного случайного перебора для решения задач дискретной комбинаторной оптимизации // Известия ВолГТУ. Серия: Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. № 10 (137). Вып. 9. 2014. с. 59–64.
7. Dorigo M. Optimization, Learning and Natural Algorithms // PhD thesis. Politecnico di Milano, Italie, 1992.
8. Ватутин Э.И., Титов В.С. Анализ результатов применения алгоритма муравьиной колонии в задаче поиска пути в графе при наличии ограничений // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2014. № 12 (161). С. 111–120.
9. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Учебное пособие. Ростов-на-Дону: РостИздат, 2004. 400 с.
10. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by Simulated Annealing // Science. Vol. 220 No. 4598. 1983. pp. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671
11. Ватутин Э.И., Титов В.С. Параметрическая оптимизация алгоритма имитации отжига на примере решения задачи поиска кратчайшего пути в графе // Вестник ЧГУ. Принята к опубликованию
12. Ватутин Э.И., Титов В.С. Использование добровольных распределенных вычислений на платформе BOINC для анализа качества разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Параллельные вычисления и задачи управления (PACO’12). М.: ИПУ РАН, 2012. Т. 2. С. 37–54.
13. Ватутин Э.И., Титов В.С. Анализ областей качественного превосходства последовательных эвристических методов синтеза разбиений при проектировании логических мультиконтроллеров // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 2. С. 115–122. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-2-115-122.
14. Dorigo M., Gambardella L. Ant colonies for the traveling salesman problem // BioSystems, Vol. 43 (2), PP. 73-81, 1997.
15. Dantzig G.B., Ramser J.H. The Truck Dispatching Problem // Management Science. Vol. 6 (1). 1959. PP. 80–91. DOI:10.1287/mnsc.6.1.80
16. Комбинаторно-логические задачи синтеза разбиений параллельных алгоритмов логического управления при проектировании логических мультиконтроллеров / Э.И. Ватутин, И.В. Зотов, В.С. Титов и др. Курск: изд-во КурскГТУ, 2010. 200 с.
17. Ватутин Э.И. Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011 г. 292 с.
18. Андреев А.Л., Заикин О.С. Охотники за квадратами // Троицкий вариант – Наука. 2012, № 118. С. 6–7.
19. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. V. 1 (1959), PP. 269–271.
20. Ватутин Э.И., Валяев С.Ю., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Расчетный модуль для тестирования комбинаторных оптимизационных алгоритмов в задаче поиска кратчайшего пути в графе с использованием добровольных распределенных вычислений // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014619797 от 22.09.14.

21. Ватутин Э.И. Эвристический подход к распознаванию изоморфизма графов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2015). Курск, 2015. С. 80–83.