УДК 681.3
Ватутин Э.И., Титов В.С.
e-mail: evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет

АНАЛИЗ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЙ ЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ

Существует большое количество задач дискретной комбинаторной оптимизации [1], качество решений которых напрямую влияет на различные технико-экономические показатели проектируемых информационных или управляющих систем, к которым относятся однородные многомодульные системы (системы логического управления [2, 3], мультипроцессоры с матричной или тороидальной топологией межсоединения процессорных модулей [4], вычислительные кластеры и суперкомпьютеры и пр.). Многие задачи из области исследования операций (например, построение расписаний [5]) также являются дискретными и оптимизационными. Некоторые задачи на существование решений, напрямую не являющиеся оптимизационными, могут быть сведены к последним [6, 7]. Многие задачи проектирования подобных мультисистем сводятся к различным оптимизационным задачам на дискретных структурах (графах, гиперграфах, множествах, матрицах особого вида и т.п.). Для некоторых из них известны алгоритмы решения, характеризующиеся полиномиальной временной сложностью (класс сложности *P*) и гарантирующие получение оптимальных решений (например, Венгерский алгоритм решения задачи о назначениях [8]), для других подобные алгоритмы не известны или их построение принципиально невозможно (последние называются труднорешаемыми и образуют класс сложности *NP*). Для решения задач класса *NP* и некоторых задач большой размерности класса *P* на практике используются эвристические методы, обеспечивающие получение суб- или квазиоптимальных решений за приемлемое время. Существуют последовательные методы, обеспечивающие получение единственного решения, и итерационные методы, организующие ограниченный перебор множества решений с выбором наилучшего. Качество *Q* решений итерационных методов как правило увеличивается с ростом числа итераций *C* (см., например, работы [9–11]), число которых обычно ограничено на практике допустимыми затратами вычислительного времени. Для решения дискретных оптимизационных задач на практике известны следующие эвристические итерационные методы [1]: методы случайного (англ. Random Search, сокр. RS) и взвешенного случайного перебора (англ. Wighted Random Search, сокр. WRS), метод перебора с ограничением числа ветвей (англ. Limited Brute Force, сокр. LBF), метод муравьиной колонии (англ. Ant Colony, сокр. AC), метод имитации отжига (сокр. Simulated Annealing, сокр. SA), метод направленной эволюции или генетический метод (англ. Genetic Algorithm, сокр. GA) и метод пчелиной колонии (англ. Bee Colony, сокр. BC). Они характеризуются как существенно различным качеством получаемых решений, так и различной скоростью сходимости. На практике наибольший интерес представляют методы, которые для указанной решаемой задачи обеспечивают получение решений наивысшего качества за минимальное число итераций, т.е. обладают высокой скоростью сходимости.

В качестве тестовой задачи была взята широко известная задача поиска кратчайшего пути $P=\left[a_{i_1}=a_{нач}, a_{i_2}, ..., a_{i_Q}=a_{кон}\right]$ в графе $G=\langle A, V\rangle$, где $A=\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ – множество вершин, $|A|=N$ – число вершин (размерность задачи), $V=\{v_1, v_2, ..., v_M\}\subseteq A\times A$ – множество дуг, $|V|=M$ – число дуг, $v_i=\left(a_{нач}^{(i)}, a_{кон}^{(i)}\right)$, $a_{нач}^{(i)}\in A$, $a_{кон}^{(i)}\in A$, причем дуги взвешены значением длины $L(v_i)>0$, $i=\overline{1,M}$. Целевой функцией в указанной задаче является длина пути $L(P)=\sum_{j=1}^{Q-1}L\left(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}\right)\to\min$, в качестве ограничения выступает плотность графа $d(G)=\dfrac{M}{N(N-1)}\in[0;1]$, т.к. для графов малой плотности большое количество решений оказываются запрещенными. С целью исследования скорости сходимости перечисленных выше итерационных методов с использованием разработанного программного модуля [12] был организован вычислительный эксперимент, целью которого являлось получение зависимостей усредненного качества решений $\gamma=\dfrac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}Q_i$, где $K=100$ – объем выборки тестовых примеров, от числа итераций C для различных итерационных методов. Кроме перечисленных выше методов в ходе экспериментов также производилось сравнения качества решений с решениями, полученными с использованием жадного метода (англ. Greedy, сокр. G), алгоритма Дейкстры [13] (англ. Optimal, сокр. O) и модификации метода AC с возможностью запоминания порядка посещения вершин пути [14] (сокр. AC2).

Полученные результаты приведены на рис. 1–3. Их анализ показывает (рис. 1), что метод RS обеспечивают наименьшую скорость сходимости, незначительно лучше него проявляет себя метод WRS, более интеллектуальные методы (GA, SA, разновидности AC) демонстрируют существенно более высокую скорость сходимости. При малом числе итераций $C<5\div 10$ методы LBF и SA обеспечивают получение решений более высокого качества, однако при увеличении C методы GA и AC начинают демонстрировать превосходство над ними. С ростом числа итераций указанное поведение методов в целом сохраняется (рис. 2). Следует лишь отметить, что приблизительно с $C \approx 60$ метод WRS по скорости сходимости опережает SA.

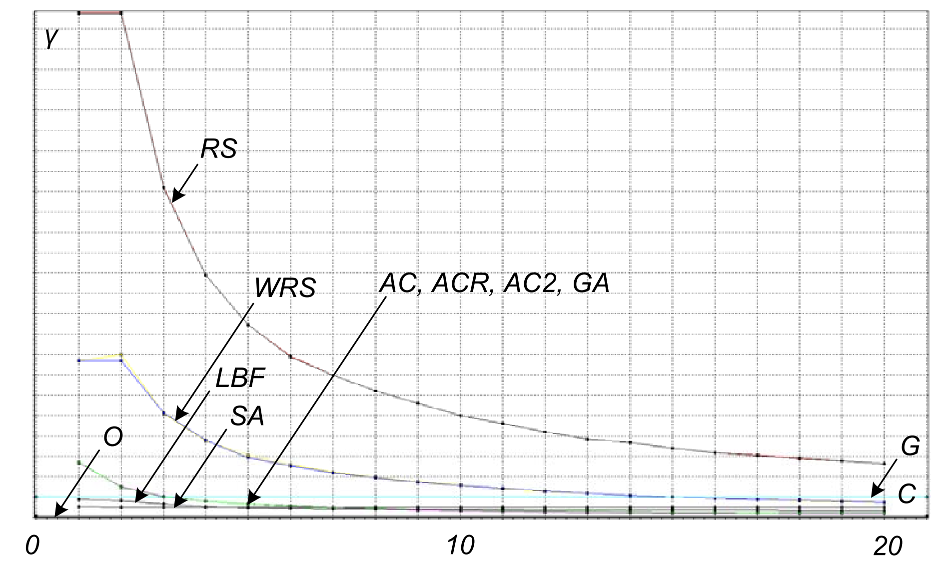

Рис. 1. Зависимости усредненного качества решений от числа итераций при $N = 100$, $d = 0{,}9$, $C \leq 20$ (наличие буквы «*R*» в имени метода обозначает его модификацию с поддержкой комбинаторных возвратов [15])

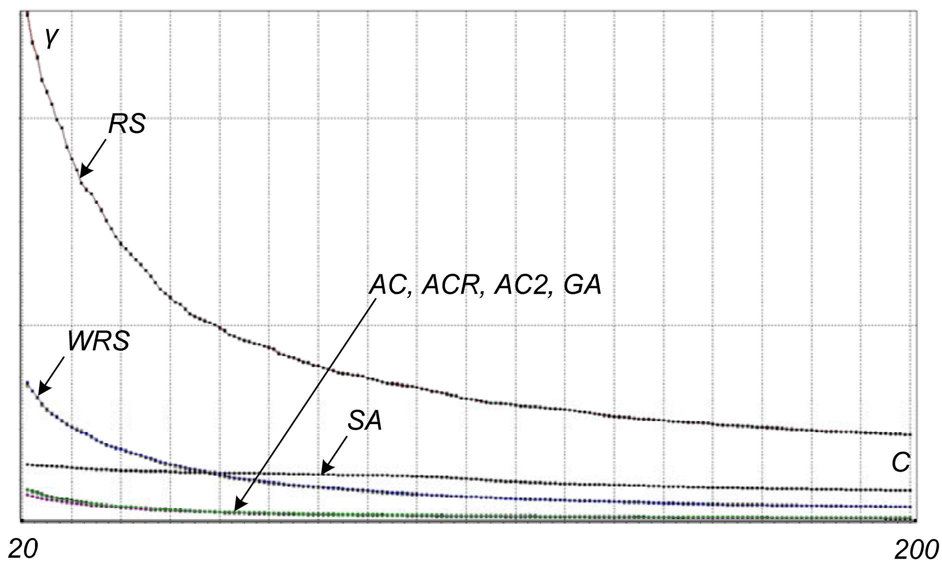

Рис. 2. Зависимости усредненного качества решений от числа итераций при $N = 100$, $d = 0{,}9$, $20 \leq C \leq 200$

С ростом числа итераций до $C = 1\,000$ поведение методов в целом не изменяется (рис. 3), при этом становится видно, что метод BC начинает несколько превосходить по качеству метод RS, не достигая однако качества других методов. На рис. 3 справа с увеличением изображены наиболее перспективные методы AC, ACR, AC2 и GA, в составе которых для данных условий эксперимента наиболее перспективными является методы AC и ACR.

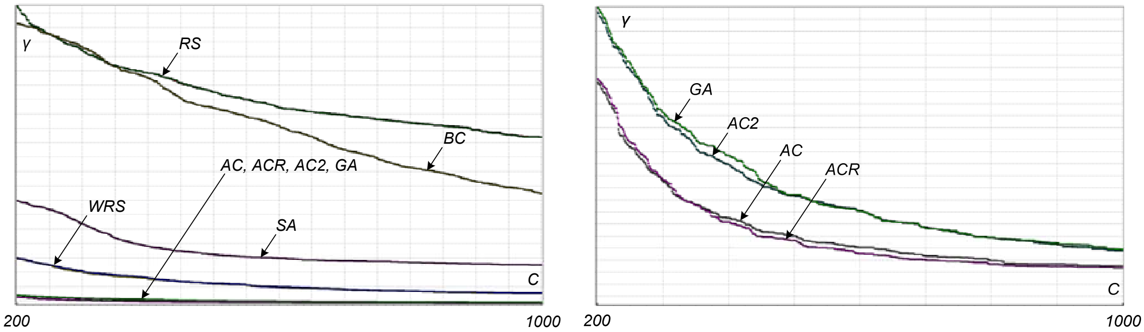

Рис. 3. Зависимости усредненного качества решений от числа итераций при $N = 100$, $d = 0{,}9$, $200 \le C \le 1\,000$ (правый график получен увеличением нижней части левого)

Аналогичные вычислительные эксперименты были проведены для графов с другим числом вершин (как большим, так и меньшим), данное поведение методов качественно повторяется. При этом при уменьшении плотности графов существенно падает эффективность методов, основанных на модификации текущего решения (BC и SA), соотношение скоростей сходимости других методов остается неизменным.

Исходя из полученных результатов, можно сделать несколько выводов. Прежде всего следует отметить, что скорость сходимости различных итерационных методов существенно различается, что вынуждает выполнять исследования, направленные на ее оценку, с целью выявления наиболее эффективного метода (либо их комбинации), обеспечивающего получение наиболее качественных решений с наименьшими затратами вычислительного времени. Кроме того, скорость сходимости различных методов при различном числе итераций не остается постоянной, что может быть использовано при разработке более интеллектуальных эвристических итерационных методов путем комбинации известных методов с целью получения большей скорости сходимости.

Библиографический список

1. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 270 с.
2. Комбинаторно-логические задачи синтеза разбиений параллельных алгоритмов логического управления при проектировании логических мультиконтроллеров / Э.И. Ватутин, И.В. Зотов, М.Ю. Сохен, В.С. Титов. Курск: изд-во КурскГТУ, 2010. 200 с.
3. Ватутин Э.И. Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrücken: LAP, 2011. 292 с.
4. Бобынцев Д.О., Борзов Д.Б., Типикин А.П. Анализ качества размеще-

ния параллельных подпрограмм в матричных мультиконтроллерах // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 6. С. 35–39.
5. Ватутин Э.И., Ватутин В.И., Романченко А.С. Оценка качества расписания вуза с использованием весовой функции // Распознавание – 2012. Курск, 2012. С. 136–138.
6. Ватутин Э.И. Эвристический подход к распознаванию изоморфизма графов // Распознавание – 2015. Курск, 2015. С. 80–83.
7. Ватутин Э.И., Журавлев А.Д., Заикин О.С., Титов В.С. Особенности использования взвешивающих эвристик в задаче поиска диагональных латинских квадратов // Известия ЮЗГУ. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2015. № 3 (16). С. 18–30.
8. Kuhn H.W. The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly, 2:83–97, 1955.
9. Ватутин Э.И., Колясников Д.В., Титов В.С. Анализ результатов применения метода случайного перебора в задаче поиска разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 12 (161). С. 102–110.
10. Ватутин Э.И., Романченко А.С., Титов В.С. Исследование влияния порядка рассмотрения пар на качество расписаний при использовании жадного подхода // Известия ЮЗГУ. 2013. № 1 (46). С. 58–64.
11. Ватутин Э.И., Бобынцев Д.О., Романченко А.С. Исследование влияния частичного упорядочивания пар и локального улучшения окрестности пары на качество расписаний при использовании жадного подхода // Известия ЮЗГУ. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2014. № 1. С. 8–16.
12. Ватутин Э.И., Валяев С.Ю., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Расчетный модуль для тестирования комбинаторных оптимизационных алгоритмов в задаче поиска кратчайшего пути в графе с использованием добровольных распределенных вычислений // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2014619797 от 22.09.14.
13. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. V. 1 (1959), PP. 269–271.
14. Ватутин Э.И., Титов В.С. Об одном подходе к использованию алгоритма муравьиной колонии при решении задач дискретной комбинаторной оптимизации // Интеллект – 2015. Тула, 2015. С. 8–13.
15. Ватутин Э.И., Мартынов И.А., Титов В.С. Способ обхода тупиков при решении задач дискретной оптимизации с ограничениями // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2014). Самара, 2014. С. 313–317.