Э.И. Ватутин, И.А. Мартынов, В.С. Титов

СПОСОБ ОБХОДА ТУПИКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Юго-Западный государственный университет)

В настоящее время известно большое количество задач фундаментального и прикладного характера, относящихся к классу дискретной комбинаторной оптимизации. В их состав входят многие оптимизационные задачи на графах и множествах [1–3], задачи из области математического программирования и исследования операций [4–5], а также сводимые к ним [6–8]. Для многих из них (поиск кратчайшего пути в графе, построение минимального остовного дерева, задача о назначениях и др.), образующих собой класс *P*, известны быстрые алгоритмы, обеспечивающие получение оптимального решения за полиномиальное время. В то же время существует достаточно обширный класс задач, именуемый классом *NP*, для которых быстрые полиномиальные алгоритмы неизвестны или принципиально не могут быть разработаны (например, поиск гамильтонова цикла, построение минимальной раскраски, разбиения и др.). Однако и некоторые задачи класса *P*, по определению характеризующиеся полиномиальной асимптотической временной сложностью и в теории считающиеся быстро решаемыми, с ростом размерности не допускают получения оптимальных решений за приемлемое время (например, задача о назначениях, решаемая с использованием Венгерского алгоритма [9] за время $O\left(N^4\right)$ или ряд задач, возникающих при трассировке межсоединений печатных плат и микросхем [10]). Указанная проблемная ситуация вынуждает использовать различные эвристические подходы, позволяющие получение субоптимальных решений различного качества с различными затратами вычислительного времени. Во многих из них при этом производится построение комбинаторного дерева, ветви которого представляют собой различные варианты решения. Обход части дерева позволяет получить группу решений, из которых выбирается наилучшее и возвращается в качестве результата работы эвристического метода.

Для многих задач на получаемые решения накладывается ряд ограничений, которые могут иметь различную природу (например, малое или большое число ребер в графе, что соответственно затрудняет поиск путей в первом случае и увеличивает хроматическое число во втором, наличие запрещенных элементов в матрице для задачи о назначениях и пр.) и силу [11–13]. Наличие ограничений приводит к тому, что некоторые из решений (ветвей комбинаторного дерева) являются некорректными (тупиковыми), а соответствующий эвристический метод может не найти ни одного корректного решения даже при теоретической возможности их существования (по мере усиления ограничений задача из доказательства оптимальности решения трансформируется в гораздо более сложную задачу на существование решения), что характеризуется соответствующим значением вероятности отыскания решения.

Рассмотрим обозначенную проблему на примере задачи поиска кратчайшего пути длиной $L = \sum_i l_i \to \min$ в графе $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ – множество вершин, $V = \{v_1, v_2, ..., v_M\} \subseteq A \times A$ – множество дуг, взвешенных значениями длины $l_i = l(v_i)$. Данная задача достаточно просто формулируется в терминах теории графов, что позволяет использовать ее в качестве тестовой для анализа результатов применения различных эвристических методов. Пример графа, кратчайший путь, комбинаторное дерево и тупиковые решения показаны на рисунке.

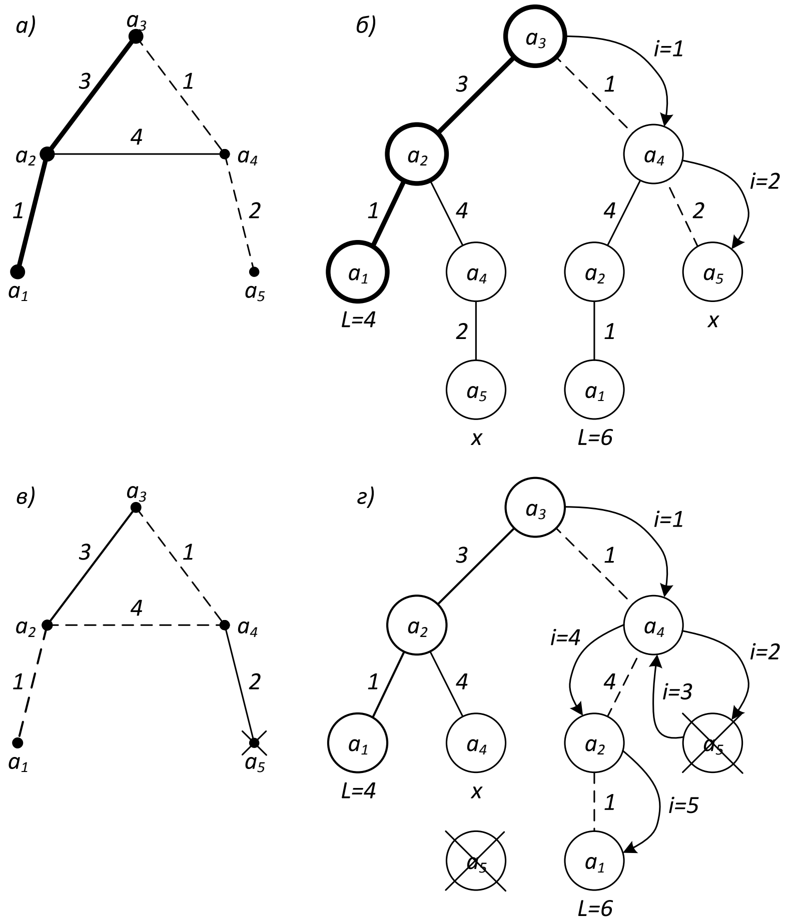

Рис. Иллюстрация к возможности получения тупиковых решений в задаче поиска кратчайшего пути: а – исходный граф (жирным выделен искомый кратчайший путь между вершинами a_3 и a_1, пунктиром показано тупиковое жадное решение); б – соответствующее комбинаторное дерево; в – жадное решение при запрете посещения тупиковой вершины a_5; г – порядок обхода узлов комбинаторного дерева с учетом возврата из тупиковой вершины a_5

В приведенном примере жадный алгоритм (взятый как пример эвристического подхода) приводит к нахождению тупикового пути $a_3 - a_4 - a_5$. Обход тупиков в данной задаче можно производить путем запрета посещения последней вершины в тупиковом пути (в приведенном примере – a_5) с возвратом на один ярус комбинаторного дерева вверх (при повторном заходе в тупик описанная процедура повторяется).

С целью апробации предложенного способа обхода тупиков в рассматриваемой задаче был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого была сформированы выборка из $K=100$ графов с $N=30$ вершин каждый и плотностью $d=0{,}1$, которая представляет собой отношение текущего числа дуг к максимальному.

Таблица. Результаты вычислительного эксперимента. $\overline{L}$ – средняя длина пути, $\Delta\overline{L}$ – среднее отклонение длины пути от кратчайшей, $\overline{p}$ – вероятность отыскания решения, $\overline{p}_{opt}$ – вероятность отыскания оптимального решения, t – затраты вычислительного времени, O – оптимальное решение, G – жадное решение, RM – случайный перебор, суффикс R в названии метода соответствует применению стратегии возвратов из тупиков

Метод	$\overline{L}$	$\Delta\overline{L}$	$\overline{p}$	$\overline{p}_{opt}$	t, мс
O	1,2088	0,0000	1,00	1,00	0,02
G	1,9231	1,0863	0,28	0,09	0,003
GR	3,7063	2,4974	1,00	0,12	0,01
RM	1,1595	0,0000	0,34	0,34	3,73
RMR	1,2114	0,0026	1,00	0,97	7,08

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что отыскание решений в рассмотренной задаче становится возможным в независимости от наличия тупиков в комбинаторном дереве, что подтверждает целесообразность и работоспособность предложенного способа обхода тупиков. Максимальное число запретов ограничено числом городов N, что определяет линейную зависимость числа возвратов от размерности задачи и не меняет полиномиальной временной сложности исходного безвозвратного алгоритма. Аналогичный прием обхода тупиковых решений в сочетании с методом ветвей и границ может быть применен и в других комбинаторных оптимизационных задачах, однако используемая процедура обхода тупиков будет другой. В настоящее время в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@home [14] поставлен соответствующий вычислительный эксперимент, целью которого является исследование влияния рассмотренной стратегии обхода тупиков в сочетании с рядом известных методов комбинаторной оптимизации в зависимости от различной размерности задачи и различной плотности графов.

Библиографический список

1. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.
2. Дремов Е.Н., Ватутин Э.И. Сравнение качества решений методов поиска кратчайшего пути в графе // Оптико-электронные приборы и устройства в си-

стемах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2013). Курск, изд-во ЮЗГУ, 2013. С. 249–251.
3. Колясников Д.В., Ватутин Э.И. Анализ степени приближения к оптимуму оценки хроматического числа графа с использованием эвристических методов // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2013). Курск, изд-во ЮЗГУ, 2013. С. 253–255.
4. Ватутин Э.И., Романченко А.С., Титов В.С. Исследование влияния порядка рассмотрения пар на качество расписаний при использовании жадного подхода // Известия ЮЗГУ. 2013. № 1 (46). С. 58–64.
5. Ватутин Э.И., Бобынцев Д.О., Романченко А.С. Программа для жадного построения расписаний учебных занятий вуза // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618554 от 11.09.13.
6. Комбинаторно-логические задачи синтеза разбиений параллельных алгоритмов логического управления при проектировании логических мультиконтроллеров / Э.И. Ватутин, И.В. Зотов, М.Ю. Сохен, В.С. Титов. Курск: изд-во КурскГТУ, 2010. 200 с.
7. Ватутин Э.И. Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011 г. 292 с.
8. Бобынцев Д.О., Ватутин Э.И., Титов В.С. Оценка производительности матричного мультипроцессора при выполнении параллельного алгоритма решения задачи гравитационного взаимодействия N тел // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2013. № 4. С. 20–28.
9. Kuhn H.W. Variants of the Hungarian method for assignment problems // Naval Research Logistics Quarterly, 1956. PP. 253–258.
10. Курейчик В. М., Глушань В. М., Щербаков Л. И. Комбинаторные аппаратные модели и алгоритмы в САПР. М.: Радио и связь, 1990. 216 с.
11. Ватутин Э.И., Волобуев С.В., Зотов И.В. Комплексный сравнительный анализ качества разбиений при синтезе логических мультиконтроллеров в условиях присутствия технологических ограничений // Параллельные вычисления и задачи управления (PACO’08). М.: ИПУ РАН, 2008. С. 643–685.
12. Ватутин Э.И., Титов В.С. Сравнение методов синтеза разбиений граф-схем параллельных алгоритмов с использованием двумерных диаграмм // Известия ЮЗГУ. № 3 (42), 2012. С. 66–74.
13. Ватутин Э.И., Титов В.С. Использование добровольных распределенных вычислений на платформе BOINC для анализа качества разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Параллельные вычисления и задачи управления (PACO’12). М.: ИПУ РАН, 2012. С. 37–54.
14. http://gerasim.boinc.ru