



ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РОЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ*

Приведено описание особенностей реализации метода роя частиц при решении задач дискретной комбинаторной оптимизации. Показано, что основные подходы базируются на движении частиц роя в непрерывном пространстве с последующим отображением их координат в дискретные элементы решения, либо на применении модифицирующих операций, специфических для решаемой задачи. Эффективность разработанных авторами программных реализаций метода роя частиц проанализирована в тестовой задаче поиска кратчайшего пути в графе, в результате чего выявлено, что метод эффективен только при решении задач малой размерности, с ростом их размерности качество получаемых решений и скорость сходимости существенно уступают методу муравьиной колонии.

Ключевые слова: дискретная комбинаторная оптимизация; эвристические методы; метод роя частиц; поиск пути в графе; метаоптимизация.

E. I. Vatutin, V. S. Titov (Southwest State University, Kursk, Russia)

INVESTIGATION OF FEATURES OF PARTICLE SWARM OPTIMIZATION METHOD IN GRAPH SHORTEST PATH PROBLEM WITH CONSTRAINTS

The article describes the features of the implementation of the particle swarm optimization method for solving discrete combinatorial optimization problems. It is shown that the well known approaches are based on the motion of the swarm particles in a continuous space with the subsequent mapping of their coordinates into discrete elements of the solution of the problem or on the set of modifying operations that are specific for discrete problem being solved. Three versions of the software implementation of the particle swarm method was developed by authors. First of them based on moving of the agents (particles) within the continuous space with real coordinates, speeds and velocities and mapping coordinated to vertices of path being formed using truncation. Second of them very similar to fuzzy logic group of approaches and based on the changing probabilities of use vertex i in path position j (probabilities and “speeds” of their changing are also real values and mapping procedure appears during final decision constructing from the set of probabilities). Third of them don't use movement in continuous space. Instead it based on forming starting decisions using random search method with combinatorial returns and modifying it using set of modifying operations (adding vertex to path, deleting vertex from path, etc.) aimed to decrease some metrics (very similar to the well known Hamming or Levenstein distances) in the direction to decision with better quality (in most cases to local or global record). The effectiveness of the software implementations of the particle swarm optimization method was analyzed in the graph shortest path problem. Within computing experiment formation of the sample with pseudo-random graphs with selected parameters N (number of vertices) and d (graph density) was organized. For each graph in sample with using all of developed software implementations the process of getting best decision was performed. After that comparison process based on averaged values of decisions quality (paths length) was organized. It is revealed that the method is effective only for solving problems of small size. With the increase of the problem size the quality of the solutions obtained and the convergence rate of method are significantly inferior to the ant colony optimization method.

Keywords: Discrete combinatorial optimization; Heuristic methods; Particle swarm optimization; Graph shortest path problem; Meta-optimization.

Статья поступила в редакцию 12.10.2017 г.

* Работа частично поддержана РФФИ, проект № 17-07-00317-а и Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук, грант № МК-9445.2016.8

Введение

В области комбинаторной оптимизации и смежных с ней областях прикладных наук известно большое число оптимизационных задач, аргументы (элементы решения) которых могут принимать только дискретные значения (например, целочисленные или булевы). Отыскание оптимальных решений указанных задач невозможно для задач практически важной размерности, образующих класс сложности NP , поэтому для их решения применяются различные эвристические методы [1, 2]. Они характеризуются различной трудоемкостью реализации, результирующим качеством получаемых решений (степенью их приближения к оптимуму) и затратами вычислительного времени на их отыскание, ввиду чего вызывает интерес сравнение эффективности и выработка рекомендаций о целесообразности их применения на практике.

Р

Особенности реализации метода роя частиц при решении задач дискретной оптимизации

К эвристическим методам относится *метод роя частиц (МРЧ)*, на английском языке – *PSO (Particle Swarm Optimization)*, предложенный Эберхартом и Кеннеди в 1995 г. [3]. Метод базируется на имитации группового поведения конечного множества агентов (например, комаров, рыб или птиц в живой природе). При решении оптимизационных задач вида $f(X) \rightarrow \min$, где $f(X)$ – целевая функция, $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ – ее аргументы,

т.е. текущее положение каждого i -го агента (частицы), $i = \overline{1, Z}$ (Z – размер колонии (роя), характеризуется вектором с координатами $X_i = [x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}]$). При этом частица имеет текущую скорость $V_i^{(t)} = [v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \dots, v_N^{(i)}]$, а ее положение на t -м шаге алгоритма определяется как $X_i^{(t)} = X_i^{(t-1)} + V_i^{(t-1)}$. Скорость частицы на t -м шаге определяется по формуле

$$V_i^{(t)} = \alpha V_i^{(t-1)} + \beta R_k \otimes (X_i^* - X_i^{(t)}) + \gamma R_{k+1} \otimes (X^{**} - X_i^{(t)}), \tag{1}$$

где « \otimes » – обозначение прямого (покомпонентного) произведения векторов:

$$X \otimes Y = [x_1, x_2, \dots, x_N] \otimes [y_1, y_2, \dots, y_N] = [x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_N y_N];$$

$$X_i^* = \arg \min_{\tau=0, t} f(X_i^{(\tau)}) \text{ – наилучшее положение } i\text{-й частицы роя за время его движения (локальный рекорд);}$$

где X_i^* – наилучшее положение i -й частицы роя за время его движения (локальный рекорд);

$$X^{**} = \arg \min_{i=1, Z} f(X_i^*) \text{ – наилучшее положение среди всех частиц роя (глобальный рекорд);}$$

где X^{**} – наилучшее положение среди всех частиц роя (глобальный рекорд);

α, β, γ – настроечные параметры (α – характеризует движение частицы по инерции, β, γ – притяжение соответственно к локальному и глобальному рекорду);

R_k – вектор псевдослучайных чисел с равномерным распределением на отрезке $[0; 1]$.

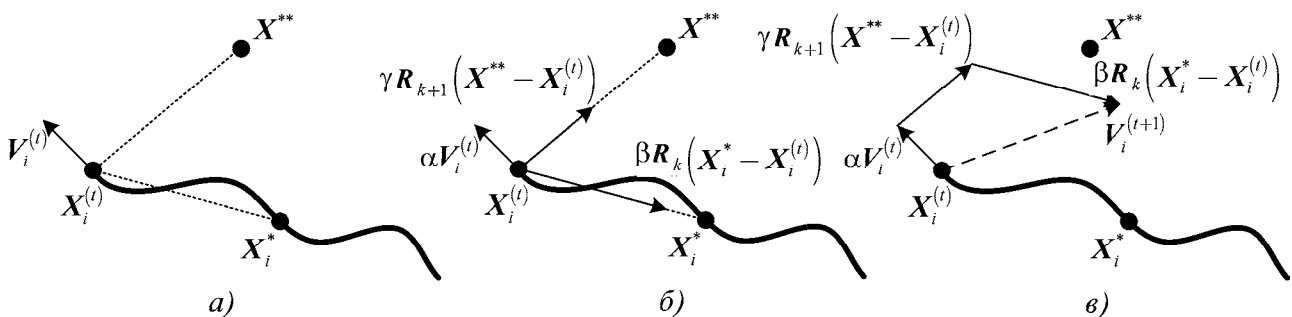


Рис. 1. Схемы движения частицы роя в сторону глобального и локального рекордов (а); компоненты вектора скорости, соответствующие инерции $\alpha V_i^{(t)}$ и движению в направлении локального $\beta R_k (X_i^* - X_i^{(t)})$ и глобального $\gamma R_{k+1} \otimes (X^{**} - X_i^{(t)})$ рекордов (б); результирующий вектор скорости частицы на следующем шаге $V_i^{(t+1)}$ (в) (жирная линия – траектория движения частицы; штриховая линия – направление (вектор) в сторону глобального или локального рекордов)

Работа МРЧ производится за заданное число итераций C_{\max} , результирующим решением считается глобальный рекорд X^{**} . Приведенное описание метода является базовым, в некоторых случаях [4] применяются многороевая или мултистарт-стратегии, различные топологии соседства частиц, механизмы локального (градиентного поиска) в целях улучшения текущего положения частиц и пр.

Рассмотренная выше стратегия движения частиц в непрерывном пространстве параметров целевой функции с успехом применяется при решении ряда задач непрерывной оптимизации [5 – 7], однако в дискретных задачах она напрямую не применима ввиду ряда сложностей с понятием скорости движения частицы в дискретном пространстве (наиболее ярким примером являются задачи, в которых аргументы могут принимать только булевы значения, а векторы скоростей $V_i^{(t)} \in \{-1, 1\}$ теряют смысл). Для их решения приведенные выше формулы не подходят и применяются специализированные подходы [8 – 13].

Первое направление подходов оперирует движением частиц роя в непрерывном пространстве R_1 с последующим отображением координат частиц в дискретное пространство R_2 параметров целевой функции ($R_1 \rightarrow R_2$). Указанное отображение может быть выполнено различными способами, например, с использованием сигмоидальной функции $\sigma(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$, $0 < \sigma(y) < 1$, $y \in R_1$, где $\sigma(y)$ определяет вероятность принадлежности дискретного значения $x \in R_2$ одному из бинарных значений

$$x = \begin{cases} 1, & r_k < \sigma(y); \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где r_k – очередное псевдослучайное число с равномерным распределением на отрезке.

Если по условию задачи параметры целевой функции должны принимать дискретные значения из некоторого множества значений $\{v_1, v_2, \dots, v_Q\}$, то формула (2) может быть преобразована к виду

$$x = \begin{cases} v_1, & 0 < r_k \sigma(y) \leq \frac{1}{Q}; \\ v_2, & \frac{1}{Q} < r_k \sigma(y) \leq \frac{2}{Q}; \\ \dots \\ v_Q, & \frac{Q-1}{Q} < r_k \sigma(y) \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

что эквивалентно выбору одного из значений с использованием правила «рулетки» [1] пропорционально значению $\sigma(y)$. Более простой в вычислительном плане является стратегия округления значения y или $\sigma(y)$ до ближайшего значения без рандомизации

$$i = \lfloor yQ \rfloor + 1 \quad (4)$$

или

$$i = \lfloor \sigma(y)Q \rfloor + 1, \quad (5)$$

где в (4) и (5) $\lfloor \dots \rfloor$ – обозначение операции округления вниз (усечения). При использовании формул (4) и (5) необходимо также следить, чтобы результирующее значение не выходило за пределы отрезка допустимых значений.

Во втором направлении подходов не используются понятия скоростей и координат в непрерывном пространстве, а применяются конкретные решения задачи с учетом ее специфики и производится модификация решений X в целях получения решения X' , более похожего на требуемое Y (в МРЧ – на глобальный или локальный рекорд). При этом, вместо координат частиц роя используются конкретные решения, закодированные в терминах решаемой задачи, а в качестве скоростей выступают вероятности p_i применения той или иной модифицирующей операции o_i [1], специфичной для решаемой задачи, в целях получения нового положения решения $X' = o_i(X)$ в дискретном пространстве. При этом, для сохранения общей идеи МРЧ, должно выполняться условие $d(X', Y) < d(X, Y)$, где d – «расстояние» между парой решений в дискретном пространстве (аналог расстояний Хэмминга и Левенштейна).

Исследование эффективности метода роя частиц в задаче поиска кратчайшего пути в графе

Рассмотрим применение МРЧ на примере решения задачи поиска кратчайшего пути $P(G) = [a_{i_1} = a_{\text{нач}}, a_{i_2}, \dots, a_{i_Q} = a_{\text{кон}}]$ в графе $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ – множество вершин, $|A| = N$ – число вершин (размерность задачи); $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество дуг, $|V| = M$ – число дуг, $v_i = (a_{\text{нач}}^{(i)}, a_{\text{кон}}^{(i)})$, $a_{\text{нач}}^{(i)} \in A$, $a_{\text{кон}}^{(i)} \in A$, причем дуги взвешены значением длины $L(v_i) > 0$, $i = \overline{1, M}$. Целевой функцией в указанной задаче является длина пути $L(P) = \sum_{j=1}^{Q-1} L(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \rightarrow \min$, в качестве ограничения выступает плотность графа $d(G) = \frac{M}{N(N-1)} \in [0; 1]$, так как для графов малой плотности большое количество решений оказываются запрещенными (нарушающими ограничения задачи). Указанная задача имеет точное решение, получаемое полиномиально с использованием алгоритма Дейкстры за квадратичное время, что позволяет использовать ее в качестве тестовой при оценке качества решений эвристических методов.

Согласно подходу, базирующемуся на отображении непрерывного пространства в дискретное, можно разработать *первый* вариант реализации МРЧ, в рамках которого решение можно представить в виде упорядоченного набора (массива) позиций $B = [b_1, b_2, \dots, b_U]$, $2 \leq U \leq N$ пути P , каждой из которых соответствует одна из вершин $a_i \in A$, $i = \overline{1, N}$ графа G , причем $b_1 = a_{\text{нач}}$, $b_U = a_{\text{кон}}$. Соответствия между позициями b_i и вершинами a_j отметим значениями p_{ij} , имеющими смысл вероятностей присутствия j -й вершины в i -й позиции пути (аналогичный принцип используется в модифицированной версии алгоритма муравьиной колонии, базирующейся на использовании двухдольного гра-

фа, в котором аналогичные соответствия отмечаются феромоном τ_{ij}). Над вероятностями p_{ij} возможно выполнение действий по формуле (1), если рассматривать их как текущие координаты частицы в пространстве R_1 , причем их значения могут быть произвольными неотрицательными величинами. Для перехода от непрерывных значений вероятностей к дискретным значениям номеров вершин в пути примем, что в i -й позиции пути стоит j -я вершина, если $j = \arg \max_{k=1, N} p_{ik}$ (в качестве другого способа выбора номера вершины может быть использован выбор вершин пропорционально вероятностям p_{ik} с использованием правила рулетки; выполненные вычислительные эксперименты не показали статистически значимого отличия для указанных способов определения номера вершины). При подобном построении пути в его составе возможно образование циклов, что недопустимо по условиям задачи (не приводит к сокращению длины пути), поэтому при выборе очередной вершины в качестве кандидата на заполнение i -й позиции необходима либо проверка того, что выбранная вершина не использовалась ни в одной из предыдущих позиций b_k , $1 \leq k < i$, либо процедура удаления циклов [1] после формирования пути. Пример процесса получения пути по набору вероятностей p_{ik} приведен на рис. 2.

Второй вариант реализации МРЧ может быть разработан на базе округления значения координат текущей частицы посредством выражения (4). При этом не используются вероятности

		Номера вершин a_i					Путь $P(G)$
		1	2	3	4	5	
Позиции b_k	1	0,87	0,03	0,86	0,20	0,27	$a_{\text{нач}}$
	2	0,67	0,32	0,16	0,37	0,43	a_1
	3	0,08	0,47	0,07	0,84	0,06	a_4
	4	0,29	0,92	0,37	0,77	0,33	a_2
	5	0,70	0,84	0,72	0,31	0,16	$a_{\text{кон}}$
		p_{ik}					

Рис. 2. Пример процесса получения пути $P(G)$ по набору вероятностей p_{ik} (максимальные значения вероятностей выделены серым)

сти $p_{jl}^{(i)}$, вместо которых применяются координаты $x_j^{(i)}$ положения частицы в N -мерном пространстве. Принцип вычисления скоростей и корректировки координат соответствует (1) с наложением дополнительного условия $1 \leq x_j^{(i)} \leq N$ (при его несоблюдении производится принудительный возврат координаты частицы в обозначенную разрешенную область значений). Пример отображения непрерывного пространства в дискретное:

$$X = [2,03; 2,73; 6,72; 3,19; 1,62; 3,72; 4,26; 0,82] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \left[\begin{array}{cccccccc} a_{\text{нач}}, & \underbrace{a_3, a_7, a_3}_{\text{цикл 1}}, & a_2, & \underbrace{a_4, a_4}_{\text{цикл 2}}, & a_{\text{кон}} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = [a_{\text{нач}}, a_3, a_2, a_4, a_{\text{кон}}].$$

Третий вариант реализации МРЧ в рассматриваемой задаче может быть построен вследствие отказа от использования непрерывного пространства и движения в нем с использованием координат $x_j^{(i)}$ и скоростей $v_j^{(i)}$ в результате перехода к дискретным решениям (путям в графе в рассматриваемой задаче). При этом необходима реализация специализированного оператора (процедуры), который будет осуществлять движение от заданного пути P_1 к пути P_2 в дискретном пространстве решений R_2 в целях уменьшения расстояния (метрики) $d(P_1, P_2)$ между указанными путями (в окончательном случае $d(P_1, P_2) = 0$ при $P_1 = P_2$). Благодаря применению указанного оператора вначале происходит выравнивание числа вершин в составе путей P_1 и P_2 путем добавления или удаления вершин пути P_1 , а затем его вершины поочередно заменяются на вершины пути P_2 , в результате чего после реализации алгоритма S раз пути P_1 и P_2 оказываются равны. При программной реализации данной модификации МРЧ для формирования начальных решений использовался метод случайного перебора с возвратами [1, 14] как обеспечивающий большой начальный разброс решений для диверсификации пространства поиска. Модификация текущего решения в целях

уменьшения его расстояния до локального рекорда производится с вероятностью p^* , до глобального рекорда – с вероятностью p^{**} .

Для рассмотренных выше трех вариантов реализации МРЧ разработаны соответствующие программные реализации, соответственно, PSO1, PSO2 и PSO3, интегрированные в состав расчетного модуля. С их помощью организован ряд вычислительных экспериментов, базирующихся на получении выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой и заданными параметрами числа вершин графа N и его плотности d , с последующей оценкой усредненного ка-

$$\text{чества решений } \bar{L} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K L_i, \text{ где } L_i = L(P(G_i)) -$$

оценка качества решения (длины пути), найденного в графе G_i одним из методов за $C_{\text{max}} = 1000$ итераций.

Прежде всего, необходимо произвести настройку параметров вариантов реализации МРЧ, для чего выполнена метаоптимизация. Результаты метаоптимизации МРЧ приведены в табл. 1.

Анализируя полученные результаты метаоптимизации, можно сделать ряд выводов. Прежде всего, несложно заметить, что значения настроечных параметров существенно различаются для графов как различной размерности, так и различной плотности, что неудобно на практике и требует индивидуальной настройки значений параметров для каждого случая. При малых значениях плотности графа МРЧ дает относительно высокое качество решений только при больших размерах роя. Данная особенность является признаком того, что перемещения частиц роя в пространстве не играют существенной роли, и метод фактически представляет собой случайный перебор (важны лишь начальные положения частиц роя). Интересной особенностью вариантов реализации PSO1 и PSO3 является тот факт, что частицы роя предпочитают не двигаться в сторону локального рекорда. Для реализации PSO1 это выражается в отрицательном значении настроечного параметра $\beta < 0$ (частицы предпочитают лететь в сторону, обратную локальному рекорду)

1. Результаты метаоптимизации метода роя частиц

Вариант реализации МРЧ	Параметры вариантов реализации МРЧ при условиях		
	$N = 10, d = 0,9$	$N = 100, d = 0,9$	$N = 100, d = 0,1$
PSO1	$Z = 200...300;$ $p_0 = 0; v_0 = 2,0;$ $\alpha = 0,93; \beta = -10,0; \gamma = 0,5$	$Z = 100...200;$ $p_0 = 0...5; v_0 = 2,0;$ $\alpha = 0,0...0,1; \beta = -12,5; \gamma = 9,0$	$Z = 700...1000;$ $p_0, v_0, \alpha, \beta, \gamma = (\sim)$
PSO2	$Z = 200...300;$ $v_0 = 0,5; \alpha = 0,97;$ $\beta = 0,2; \gamma = 0,14$	$Z = 200...300;$ $v_0 = 0,5...0,8; \alpha = (\sim);$ $\beta = 0,4...1,0; \gamma = 0,1...0,4$	$Z = 600...1000;$ $v_0 = (\sim); \alpha = 0...0,2;$ $\beta = 0...10 (\sim); \gamma = 0,2...1,3$
PSO3	$Z = 200...300;$ $p^* = 0,0; p^{**} = 1,0$	$Z = 150...250;$ $p^* = 0,0; p^{**} = 1,0$	$Z = 800...1000;$ $p^* = 0,0; p^{**} = 1,0$

Условные обозначения: p_0 и v_0 – соответственно максимальное начальное значение вероятностей p_{ij} и скоростей $v_j^{(i)}$.

Примечание. Символ « \sim » означает, что статистически значимой зависимости качества решений от указанного параметра выявлено не было.

и нулевом значении параметра p^* для PSO3 (конкретное значение вероятности движения в сторону глобального рекорда, p^{**} при этом не играет роли и должно быть любым положительным).

В целях сравнения качества решений, получаемых рассмотренными выше тремя вариантами реализации МРЧ, проведен вычислительный

эксперимент, в ходе которого производилась генерация $K = 1000$ графов с заданными параметрами числа вершин графа N и его плотности d , оценки средней длины путей \bar{L} и вероятности получения оптимального решения p_{opt} . Результаты вычислительного эксперимента приведены в табл. 2.

2. Результаты вычислительного эксперимента

Метод	$N = 10, d = 0,5$	$N = 10, d = 0,9$	$N = 100, d = 0,5$	$N = 100, d = 0,9$
O	$\bar{L} = 0,4804$ $p_{opt} = 1,0$	$\bar{L} = 0,2928$ $p_{opt} = 1,0$	$\bar{L} = 0,0967$ $p_{opt} = 1,0$	$\bar{L} = 0,0557$ $p_{opt} = 1,0$
AC	$\bar{L} = 0,4804$ $p_{opt} = 1,0$	$\bar{L} = 0,2928$ $p_{opt} = 0,999$	$\bar{L} = 0,0990$ $p_{opt} = 0,856$	$\bar{L} = 0,0573$ $p_{opt} = 0,847$
RS	$\bar{L} = 0,4813$ $p_{opt} = 0,855$	$\bar{L} = 0,2985$ $p_{opt} = 0,918$	$\bar{L} = 0,3219$ $p_{opt} = 0,097$	$\bar{L} = 0,2872$ $p_{opt} = 0,073$
МРЧ (PSO1)	$\bar{L} = 0,4993$ $p_{opt} = 0,885$	$\bar{L} = 0,3016$ $p_{opt} = 0,897$	$\bar{L} = 0,5095$ $p_{opt} = 0,060$	$\bar{L} = 0,3118$ $p_{opt} = 0,069$
МРЧ (PSO2)	$\bar{L} = 0,4915$ $p_{opt} = 0,926$	$\bar{L} = 0,2974$ $p_{opt} = 0,939$	$\bar{L} = 0,3815$ $p_{opt} = 0,084$	$\bar{L} = 0,2415$ $p_{opt} = 0,078$
МРЧ (PSO3)	$\bar{L} = 0,4805$ $p_{opt} = 0,986$	$\bar{L} = 0,2998$ $p_{opt} = 0,911$	$\bar{L} = 0,4194$ $p_{opt} = 0,073$	$\bar{L} = 0,2924$ $p_{opt} = 0,072$

Условные обозначения: O – алгоритм Дейкстры (англ. Optimal); AC – метод муравьиной колонии (англ. Ant Colony); RS – метод случайного перебора (англ. Randon Search).

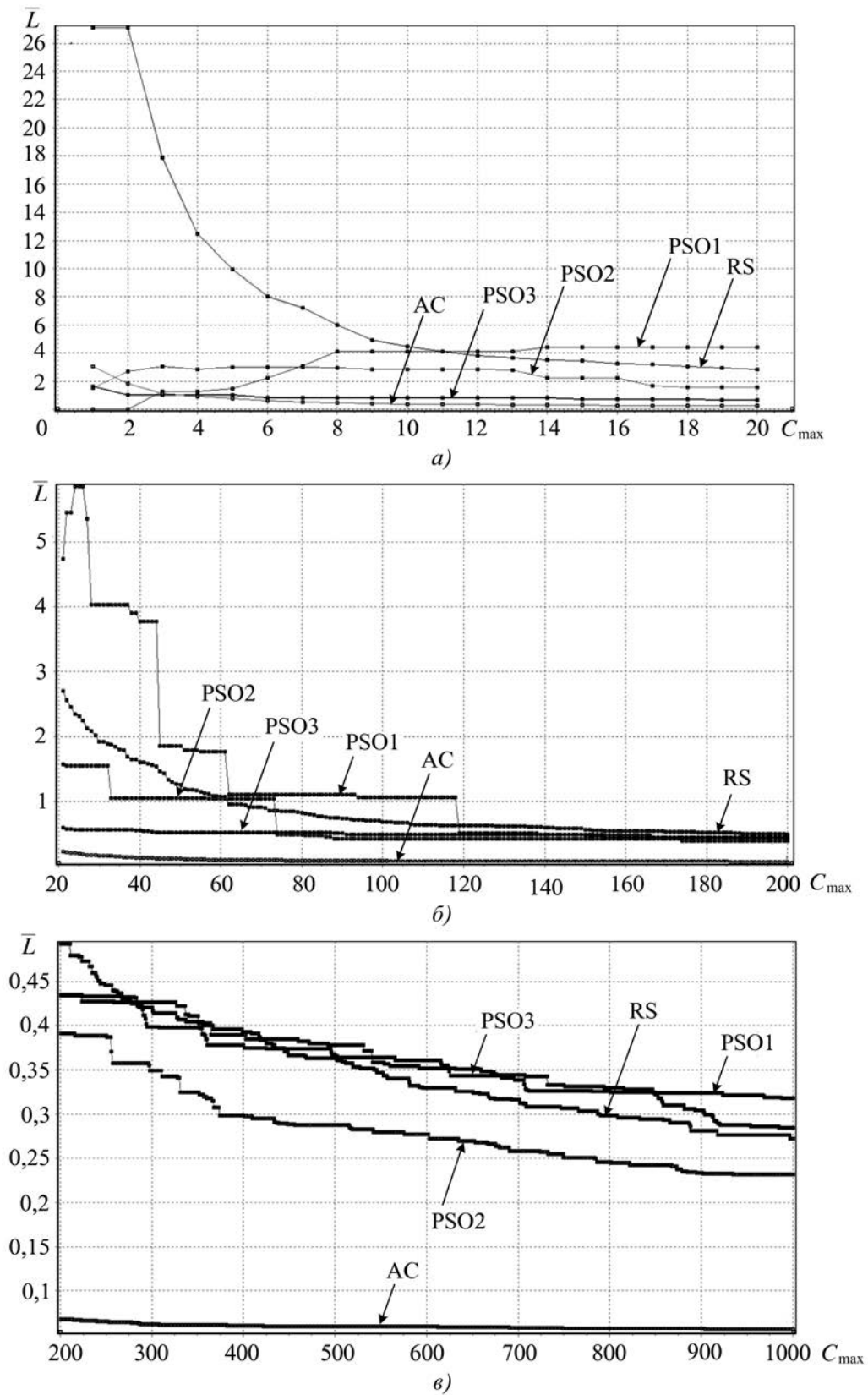


Рис. 3. Анализ скорости сходимости вариантов реализации МРЧ и методов RS и AC:

a – $1 \leq C_{\max} \leq 20$; *б* – $21 \leq C_{\max} \leq 200$; *в* – $201 \leq C_{\max} \leq 1000$

Анализируя полученные результаты вычислительных экспериментов, можно сделать вывод и том, что при решении задач малой размерности МРЧ обеспечивает получение приемлемых решений, однако с ростом размерности, как качество решений, так и вероятность получения оптимального решения, существенно снижаются, уступая даже методу случайного перебора (RS).

Кроме того, следуя работе [15], проведен анализ скорости сходимости вариантов реализации МРЧ в сравнении с методами RS и AC, результаты которого приведены на рис. 3.

Полученные зависимости скорости сходимости показывают, что варианты реализации МРЧ незначительно отличаются от RS и сильно уступают AC.

Заключение

Таким образом, в статье описаны три варианта реализации МРЧ в тестовой задаче поиска кратчайшего пути в графе. Рассмотренные варианты, несмотря на внешнее сходство, характеризуются существенными отличиями в деталях реализации и приводят к получению решений различного качества. Полученные экспериментальные результаты позволяют сделать вывод о том, что реализации PSO1 и PSO3 характеризуются скоростью сходимости, близкой к случайному перебору, что говорит об их низкой эффективности в задаче поиска пути в графе. Скорость сходимости реализации PSO2 незначительно превосходит скорость сходимости метода случайного перебора, однако она значительно уступает как методу муравьиной колонии, так и ряду других методов [15]. На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что МРЧ в разработанных авторами вариантах реализации характеризуется низкой эффективностью и не рекомендуется для практического использования, вместо него, решения более высокого качества обеспечиваются методом взвешенного случайного перебора, муравьиной колонии, генетическим методом и их модификациями.

Библиографический список

1. Ватугин Э. И., Титов В. С., Емельянов С. Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с.

2. Glover F., Kochenberger G. A. Handbook of Metaheuristics. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003. 560 p.

3. Kennedy J., Eberhart R. Particle Swarm Optimization // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Neural Networks IV. 1995. P. 1942 – 1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968.

4. Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. 446 с.

5. Кошур В. Д. Глобальная оптимизация на основе гибридного метода усреднения координат и метода роя частиц // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 4. С. 36 – 47.

6. Карпенко А. П., Матвеева К. О., Буланов В. А. 6. Решение задачи молекулярного докинга модифицированным методом роя частиц [Электронный ресурс] // Наука и образование: Научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана: электр. науч.-техн. журнал. 2014. № 4. С. 339 – 353. URL: <http://technomagelpub.elpub.ru/jour/article/view/582/584>. doi: 10.7463/0414.0707258 (дата обращения: 15.09.2017).

7. Частикова В. А., Власов К. А., Каргамышев Д. А. Обнаружение DDOS-атак на основе нейронных сетей с применением метода роя частиц в качестве алгоритма обучения // Фундаментальные исследования. 2014. № 8. Ч. 4. С. 829 – 832.

8. Kennedy J., Eberhart R. C. A Discrete Binary Version of the Particle Swarm Algorithm // Proc. of the Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC97). 1997. V. 5. P. 4104 – 4109. doi: 10.1109/ICSMC.1997.637339.

9. Goldberg E. F. G., Souza G. R. de, Goldberg M. C. Particle Swarm Optimization Algorithm for the Traveling Salesman Problem [Электронный ресурс] // Traveling Salesman Problem. 2008. URL.: http://www.intechopen.com/books/traveling_salesman_problem/particle_swarm_optimization_algorithm_for_the_traveling_salesman_problem (дата обращения: 21.09.2017).

10. Particle Swarm Optimization Based Algorithms for TSP and Generalized TSP / X. H. Shi et al. // Information Processing Letters. 2007. V. 103, No. 5. P. 169 – 176.

11. Hu X., Eberhart R.C., Shi Y. Swarm Intelligence for Permutation Optimization: A Case Study of n-Queens Problem // Proc. IEEE Swarm Intelligence Symposium. Indianapolis, Indiana, USA, 2003. P. 243 – 246.

12. Халил Селим Т. М., Горпинич А. В. Выбор оптимальных сечений проводников и мест установки и мощности батарей конденсаторов в радиальных распределительных сетях с помощью селективного метода роя частиц // Научные записки Донецкого национального технического университета. Серия: Электротехника и энергетика. 2011. № 11 (186). С. 406 – 413.

13. Лебедев В. Б., Лебедев Б. К. Построение кратчайших связывающих соединений методом кристаллизации россыпи альтернатив [Электронный ресурс] // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). М., 2014. № 1. С. 177 – 182. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D174.pdf> (дата обращения: 02.10.2017).

14. Ватутин Э. И., Мартынов И. А., Титов В. С. Способ обхода тупиков при решении задач дискретной оптимизации с ограничениями // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2014) / Самарский научный центр РАН. Самара, 2014. С. 313 – 317.

15. Ватутин Э. И., Титов В. С. Анализ скорости сходимости качества решений эвристических методов в задаче поиска кратчайшего пути в графе [Электронный ресурс] // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск, 2016. С. 19 – 25. URL: http://evatutin.narod.ru/evatutin_grth_pathfind_convrate.pdf (дата обращения: 02.10.2017).

References

1. Vatutin E. I., Titov V. S., Emel'yanov S. G. (2016). *Basics of discrete combinatorial optimization*. Moscow: Argamak-Media. [in Russian language]

2. Glover F., Kochenberger G. A. (2003). *Handbook of metaheuristics*. New York: Kluwer Academic Publishers.

3. Kennedy J., Eberhart R. (1995). *Particle swarm optimization*. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks IV, pp. 1942-1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968

4. Karpenko A. P. (2014). *Modern algorithms of search optimization. Algorithms inspired by nature: textbook*. Moscow: MGTU im. N. E. Bauman. [in Russian language]

5. Koshur V. D. (2013). Global optimization based on the hybrid method of averaging coordinates and the method of swarm particles. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 18(4), pp. 36 – 47. [in Russian language]

6. Karpenko A. P., Matveeva K. O., Bulanov V. A. (2014). Solution of the molecular docking problem by a modified swarm particle method. *Nauka i obrazovanie*, (4), pp. 339-353. [in Russian language]

7. Chastikova V. A., Vlasov K. A., Kartamyshev D. A. (2014). Detection of DDOS-attacks based

on neural networks using the particle swarm method as a learning algorithm. *Fundamental'nye issledovaniya*, (8–4), pp. 829-832. [in Russian language]

8. Kennedy J., Eberhart R. C. (1997). *A discrete binary version of the particle swarm algorithm*. Proc. of the Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC97), pp. 4104-4109.

9. Goldberg E. F. G., Goldberg M. C., Souza G. R. (2008). *Particle swarm optimization algorithm for the traveling salesman problem*. Travelling Salesman Problem (book ed. by Federico Greco). (pp. 202-225). Vienna, Austria: I-Tech.

10. Shi X. H.; Liang Y. C.; Lee H. P.; Lu C., Wang Q. X. (2007). Particle swarm optimization based algorithms for TSP and generalized TSP. *Information Processing Letters*, 103, pp. 169-176.

11. Hu X., Eberhart R. C., Shi Y. (2003). *Swarm intelligence for permutation optimization: a case study of n-queens problem*. Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium, pp. 243-246.

12. Halil T. M., Gorpinich A. V. (2011). Selection of optimal conductor cross-sections, installation site and capacitor bank power in radial distribution networks using the selective particle swarm method. *Nauchnye zapiski Doneckogo nacional'nogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Elektrotekhnika i energetika*, 186(11), pp. 406-413. [in Russian language]

13. Lebedev V. B., Lebedev B. K. (2014). Construction of the shortest binding compounds by the method of crystallization of alternatives placers. *Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanelektronnyh sistem (MES)*, (1), pp. 177-182. [in Russian language]

14. Vatutin E. I., Martynov I. A., Titov V. S. (2014). *Method for traversing dead ends in solving discrete optimization problems with constraints*. Perspective information technology (PIT-2014). (pp. 313-317). Samara: Izdatel'stvo Samarskogo nauchnogo centra RAN. [in Russian language]

15. Vatutin E. I., Titov V. S. (2016). *Analysis of the rate of convergence of the solutions quality using heuristic methods in the problem of finding the shortest path in the graph*. Information-measuring diagnostic and control systems (Diagnostics – 2016). (pp. 19-25). Kursk: Izdatel'stvo YUZGU. [in Russian language]