УДК 681.3

Ватутин Э.И., Титов В.С.
e-mail: evatutin@rambler.ru
Юго-Западный государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ЗАТРАТ НА ПОИСК РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ГРАФЕ

Существует достаточно обширный класс оптимизационных (экстремальных) задач, аргументы которых могут принимать дискретные значения [1]. К ним относятся задачи из области комбинаторики, теории графов, теории проектирования вычислительных систем, исследования операций и других разделов математики. Для некоторых из них, образующих класс сложности *NP* и именуемых трудноразрешаемыми, невозможна разработка быстрых (полиномиальных) алгоритмов, гарантирующих получение оптимальных решений за разумное время, поэтому для их решения на практике применяются эвристические методы. Их практические реализации характеризуются как различным качеством получаемых решений, так и различными затратами времени на его отыскание [2]. Многие эвристические методы являются итерационными, т.е. производят получение подмножества из C решений множества всех возможных решений задачи с последующим выбором наилучшего. Время получения одного решения является достаточно важной величиной, т.к. определяет время работы метода в целом. На практике время поиска решения всегда ограничено (в зависимости от задачи и класса аппаратного обеспечения данные ограничения могут различаться на несколько порядков), поэтому итерационный метод с малым временем поиска решения способен выполнить большее число итераций за указанное время и, следовательно, при наличии соответствующей скорости сходимости он теоретически должен превосходить другие по качеству результирующего решения.

С целью сравнения временных затрат эвристических итерационных методов на выполнение одной итерации в качестве тестовой задачи была взята широко известная задача поиска кратчайшего пути $P=\left[a_{i_1}=a_{нач}, a_{i_2}, ..., a_{i_Q}=a_{кон}\right]$ в графе $G=\langle A, V\rangle$, где $A=\{a_1, a_2, ..., a_N\}$ – множество вершин, $|A|=N$ – число вершин (размерность задачи), $V=\{v_1, v_2, ..., v_M\}\subseteq A\times A$ – множество дуг, $|V|=M$ – число дуг, $v_i=\left(a_{нач}^{(i)}, a_{кон}^{(i)}\right)$, $a_{нач}^{(i)}\in A$, $a_{кон}^{(i)}\in A$, причем дуги взвешены значением длины $L(v_i)>0$, $i=\overline{1,M}$. Целевой функцией в указанной задаче является длина пути $L(P)=\sum_{j=1}^{Q-1} L\left(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}\right) \to \min$, в качестве ограничения выступает плотность графа $d(G)=\dfrac{M}{N(N-1)} \in [0;1]$.

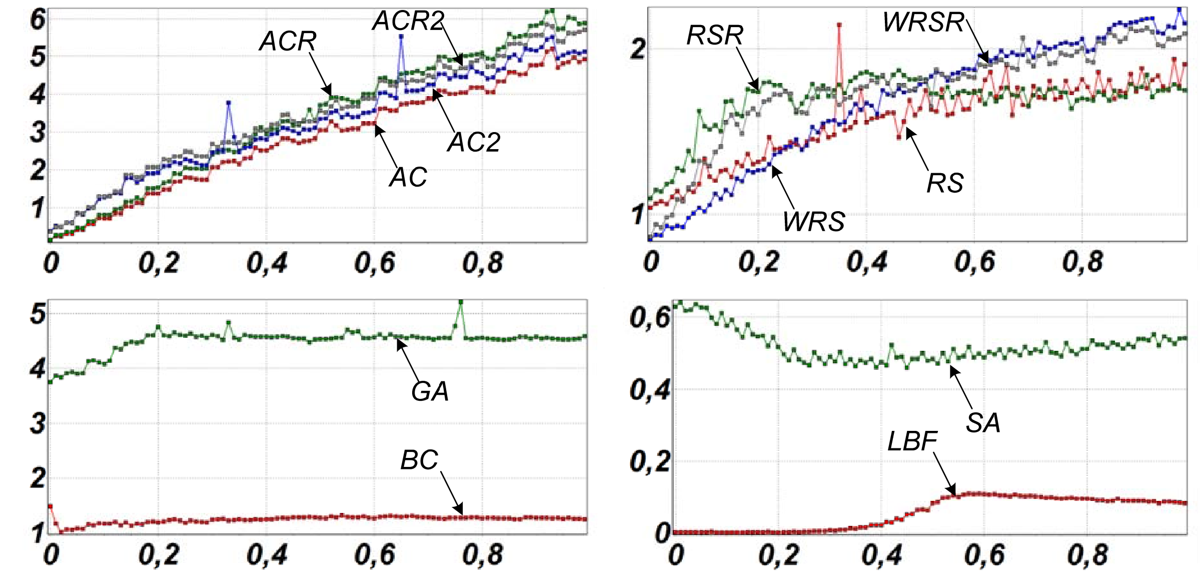

Рис. 1. Зависимости времени получения решения от плотности графа d при размерности задачи $N=10$

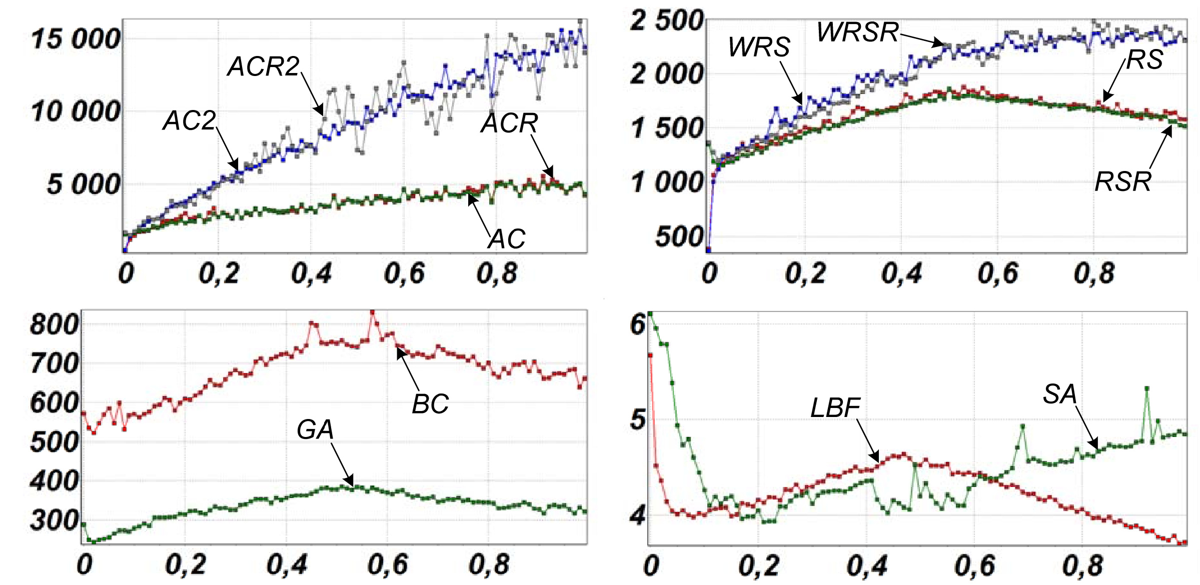

Рис. 2. Зависимости времени получения решения от плотности графа d при размерности задачи $N=500$

Для исследования были выбраны следующие эвристические итерационные методы [1]: методы случайного (англ. Random Search, сокр. RS) [3] и взвешенного случайного перебора (англ. Wighted Random Search, сокр. WRS) [4], метод перебора с ограничением числа ветвей (англ. Limited Brute Force, сокр. LBF) [1], метод муравьиной колонии (англ. Ant Colony, сокр. AC) [5–6] и его модифицированная версия [7], базирующаяся на запоминании порядка посещения вершин (сокр. AC2), метод имитации отжига (сокр. Simulated Annealing, сокр. SA) [8–9], метод направленной эволюции или генетический метод (англ. Genetic Algorithm, сокр. GA) [10] и метод пчелиной колонии (англ. Bee Colony, сокр. BC) [11–13]. Для методов, основанных на последовательном формировании решения (вершина за вершиной), были разработаны модификации, использующие комбинаторные возвраты (англ. Returns, сокр. R в имени метода) с целью выхода из тупиков [14].

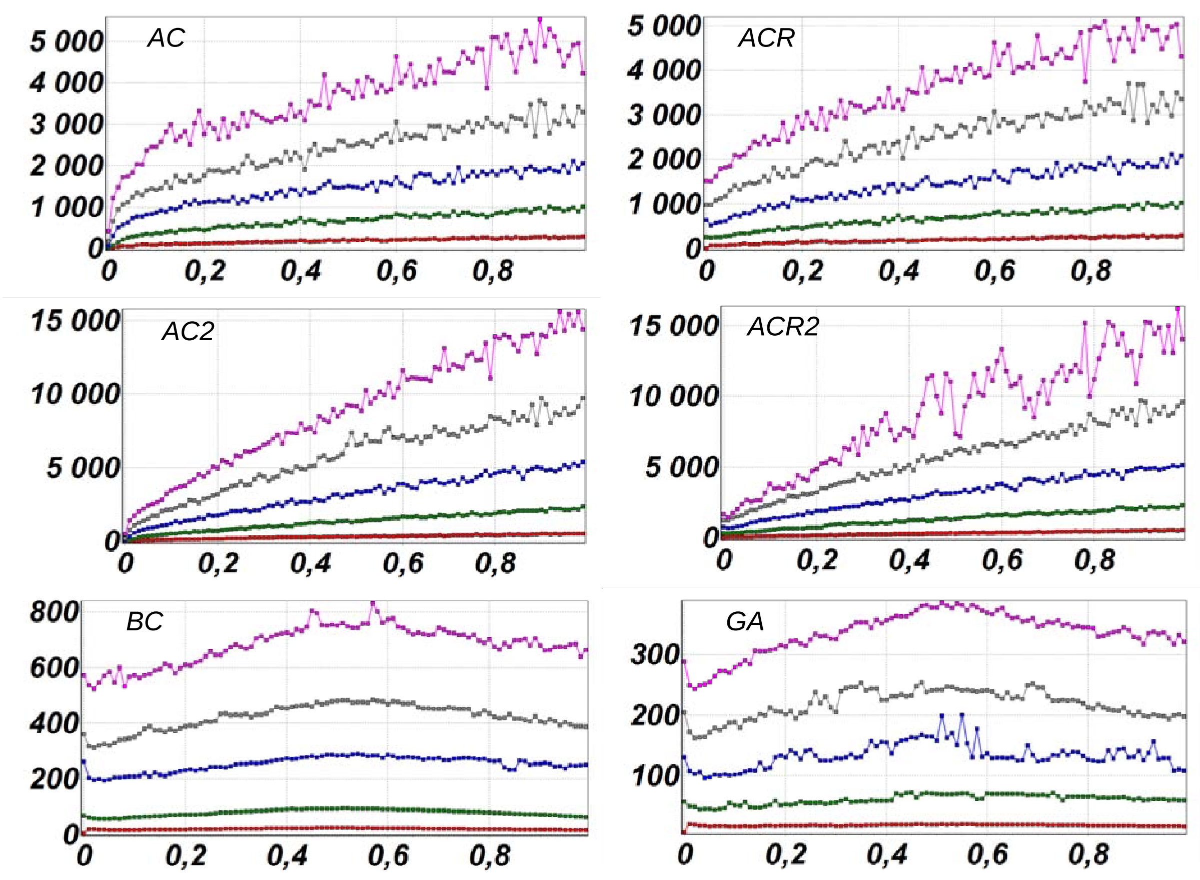

Рис. 3. Зависимости времени получения решения от плотности графа d при размерности задачи $N \in [100, 200, 300, 400, 500]$

С использованием разработанного программного модуля [15] был организован вычислительный эксперимент, целью которого являлось получение зависимостей усредненного времени получения решения для выборки из $K = 100$ случайных графов для перечисленных выше итерационных методов. Больший объем выборки ведет к уменьшению статистических выбросов, однако в то же время он линейно увеличивает время вычислительных экспериментов, поэтому было выбрано указанное выше компромиссное значение. Вычислительные эксперименты были организованы на компьютере с процессором Intel Core i7 4770 @ 3,4 ГГц в 1 поток с приоритетом Normal при наличии фоновой нагрузки в виде проектов добровольных распределенных вычислений SAT@Home [16] и Einstein@Home [17], работающих с приоритетом Idle. Общее время серии вычислительных экспериментов составило более 100 часов, полученные результаты приведены на рис. 1–4.

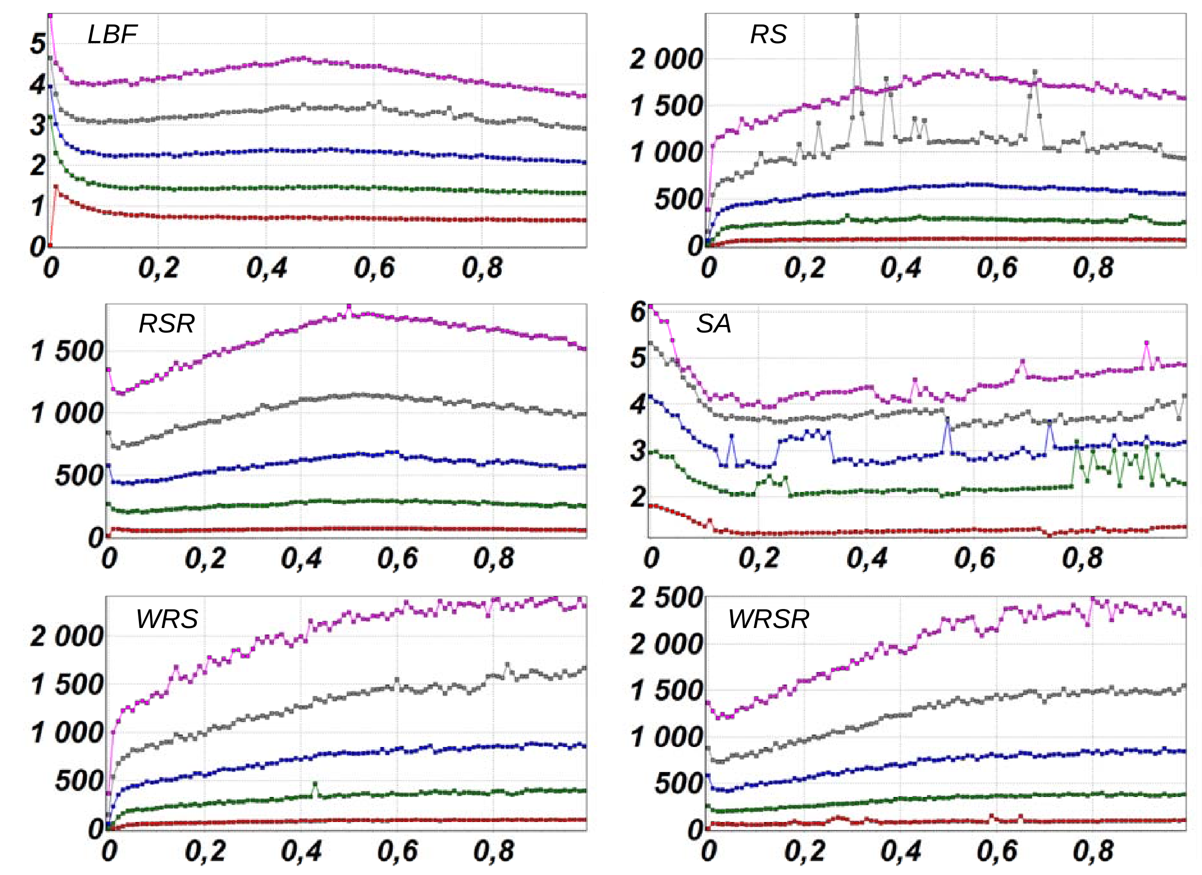

Рис. 4. Зависимости времени получения решения от плотности графа d при размерности задачи $N \in [100, 200, 300, 400, 500]$ (продолжение рис. 3)

Полученные результаты позволяют сделать ряд выводов. Прежде всего, несложно заметить, что время получения решения существенно зависит как от размерности задачи N, так и от плотности графа d, причем если от N зависимости качественно схожи (несложно показать, что время $t \simeq kN^2$, где k – некоторая константа), то зависимости от d существенно отличаются для различных методов. Так для методов AC, ACR, AC2, ACR2, WRS и WRSR время 1 итерации уменьшается с уменьшением плотности графа d, что по-видимому объясняется уменьшением арности узлов соответствующего дерева комбинаторного перебора. Для методов BC, GA, RS и RSR максимальное время получения решения наблюдается для графов плотности $d \approx 0{,}5$, увеличение и уменьшение плотности ведет к уменьшению времени. Для методов LBF и SA зависимости являются еще более нелинейными и трудно поддающимися теоретическому объяснению.

Еще одной интересной особенностью полученных зависимостей является сильный разброс полученных величин для различных эвристических методов. Так, например, при $N = 500$ модификации метода муравьиной колонии требуют до 15 с вычислительного времени на итерацию, методам RS и WRS требуется до 2,5 с, методам BC и GA – менее 1 с, а методы LBF и SA справляются с поставленной задачей за 5–6 мс. Соответственно, за постоянное время (например, за 5 часов) указанные методы успеют выполнить существенно различное (на 3–4 порядка) число итераций, а значит и качество решений следует ожидать существенно различным.

Методы на базе стратегии комбинаторных возвратов для выхода из тупиков начинают статистически значимо отличаться по времени работы от своих безвозвратных прототипов на графах малой плотности, причем даже в этом случае поддержка комбинаторных возвратов увеличивает время их работы незначительно (не более чем в 1,5 раза).

Следовательно, при анализе скорости сходимости и зависимости качества решений от размерности задачи N и силы ограничений (в данном случае, плотности графа d) необходимо учитывать выявленную особенность существенного различия во времени работы для различных эвристических итерационных методов. Данная особенность, в свою очередь, может быть использована при разработке перспективных эвристических итерационных методов, базирующихся на использованных в эксперименте известных методах.

Библиографический список

1. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016. 270 с.
2. Ватутин Э.И., Титов В.С. Анализ скорости сходимости качества решений эвристических методов в задаче поиска кратчайшего пути в графе // Диагностика – 2016. Курск: ЮЗГУ, 2016. С. 19–25.
3. Ватутин Э.И., Колясников Д.В., Мартынов И.А., Титов В.С. Метод случайного перебора в задаче построения разбиений граф-схем параллельных алгоритмов // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов. Барнаул: Барнаул, 2014. С. 115–125.
4. Ватутин Э.И., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Метод взвешенного случайного перебора для решения задач дискретной комбинаторной оптимизации // Известия ВолГТУ. Серия: Электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. № 10 (137). Вып. 9. 2014. с. 59–64.
5. Dorigo M. Optimization, Learning and Natural Algorithms // PhD thesis. Politecnico di Milano, Italie, 1992.
6. Ватутин Э.И., Титов В.С. Анализ результатов применения алгоритма

муравьиной колонии в задаче поиска пути в графе при наличии ограничений // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 12 (161). С. 111–120.
7. Ватутин Э.И., Титов В.С. Об одном подходе к использованию алгоритма муравьиной колонии при решении задач дискретной комбинаторной оптимизации // Интеллект – 2015. Тула, 2015. С. 8–13.
8. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by Simulated Annealing // Science. Vol. 220 No. 4598. 1983. P. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671.
9. Ватутин Э.И., Титов В.С. Параметрическая оптимизация алгоритма имитации отжига на примере решения задачи поиска кратчайшего пути в графе // Вестник Череповецкого государственного университета. № 6 (67). 2015. С. 13–16.
10. Ватутин Э.И., Титов В.С. Исследование особенностей применения генетического алгоритма в задаче поиска кратчайшего пути в графе при наличии ограничений на плотность графа // Многоядерные процессоры, параллельное программирование, ПЛИС, системы обработки сигналов. Барнаул, 2016. Принята к опубликованию
11. Karaboga D.D. An Idea Based On Honey Bee Swarm for Numerical Optimization // Technical Report-TR06, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
12. Pham D.T., Ghanbarzadeh A., Koc E., Otri S., Rahim S., Zaidi M. The Bees Algorithm // Technical Note, Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, UK, 2005.
13. Ватутин Э.И., Титов В.С. Особенности метаоптимизации алгоритма пчелиной колонии в задаче поиска кратчайшего пути в графе при наличии ограничений на плотность графа // Известия ЮЗГУ. 2016. Принята к опубликованию
14. Ватутин Э.И., Мартынов И.А., Титов В.С. Способ обхода тупиков при решении задач дискретной оптимизации с ограничениями // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2014). Самара: изд-во Самарского научного центра РАН. С. 313–317.
15. Ватутин Э.И., Валяев С.Ю., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С. Расчетный модуль для тестирования комбинаторных оптимизационных алгоритмов в задаче поиска кратчайшего пути в графе с использованием добровольных распределенных вычислений // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2014619797 от 22.09.14.
16. Заикин О.С., Посыпкин М.А., Семенов А.А., Храпов Н.П. Опыт организации добровольных вычислений на примере проектов OPTIMA@Home и SAT@Home // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 5-2. С. 340–347.
17. https://einstein.phys.uwm.edu