УДК 004.384:004.272:004.414.2

Ватутин Э.И., Дремов Е.Н., Мартынов И.А., Титов В.С.

Метод взвешенного случайного перебора для решения задач дискретной комбинаторной оптимизации

Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники

evatutin@rambler.ru

Ключевые слова: дискретная комбинаторная оптимизация, теория графов, эвристические методы

Аннотация. В работе предложен итерационный эвристический метод решения задач дискретной комбинаторной оптимизации, основанный на выборе направления движения в пределах комбинаторного дерева с использованием стохастического эвристического критерия. Метод апробирован на задаче поиска кратчайшего пути в графе и характеризуется высокой скоростью сходимости, высокой степенью приближения к оптимуму и хорошим потенциалом для распараллеливания.

Abstract. An iterative heuristic method for discrete combinatorial problems solving is described. Method based on choosing direction within combinatorial tree with using of stochastic heuristic criteria. Given method was tested in the shortest path founding problem and shown that it has high convergence rate, high degree of approximation to the optimum and well parallelized.

Решение многих важных для практики прикладных задач сводится к задачам из области дискретной комбинаторной оптимизации. Некоторые из них могут быть решены быстро с использованием специализированных полиномиальных алгоритмов. К ним относятся задача построения минимального основного дерева, решаемая с использованием алгоритмов Прима или Краскала [1, 2] за время $O(N\log N)$; задача поиска кратчайших путей в графе, решаемая с использованием алгоритмов Дейкстры или Беллмана-Форда [3, 4] в зависимости от специфики постановки задачи за время $O(N^2)$; задача о назначениях, решаемая с применением венгерского алгоритма (алгоритм Куна-Манкерса) [5, 6] за время $O(N^3)$; и многие другие. Данные задачи относятся к классу *P* и формально считаются быстро решаемыми, однако с ростом размерности задачи время отыскания оптимального решения может быть неприемлемо велико. Существует также большое количество задач, образующих класс *NP*, для которых неизвестны быстрые полиномиальные алгоритмы или доказано, что их построение невозможно (при условии неравенства классов *P* и *NP* [7]). К ним относятся задачи поиска минимального гамильтонова пути или цикла [8], поиск минимальной раскраски графа [9], выделение клик [10], разбиения графов и множеств [11], поиск изоморфного подграфа в графе [12, 13], решение транспортной задачи [14] и многие другие. Для их решения отыскание оптимального решения в большинстве практически важных случаев невозможно (за исключением задач малой размерности), поэтому для их решения применяются различные эвристические подходы, к наиболее известным из которых относятся жадные алгоритмы, ограниченный или случайный перебор, организующие перебор среди подмножества возможных решений. Данные подходы являются универсальными и могут быть использованы для решения любых задач дискретной комбинаторной оптимизации (в отличие от специализированных подходов, не рассматриваемых в рамках данной работы, которые опираются на специфику конкретной задачи и зачастую обеспечивают лучшее качество решений [15, 16]).

При решении задач указанного класса с использованием рассмотренных выше подходов обычно вводится понятие комбинаторного дерева. В процессе формирования решения производится обход всех его ветвей (полный перебор, возможно с применением стратегии ветвей и границ [17]) путем организации поиска в глубину, либо некоторого подмножества из них ввиду невозможности обхода за приемлемое время всего дерева, число ветвей которого зачастую представляется факториальной или экспоненциальной функцией от размерности задачи. В качестве поясняющего примера рассмотрим известную задачу поиска кратчайшего пути во взвешенном неориентированном графе $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ – множество вершин, $V = \{v_1, v_2, ..., v_M\} \subseteq A \times A$ – множество ребер, взвешенных весами $l(v_i)$, $i = \overline{1, M}$, на примере графа, приведенного на рис. 1.

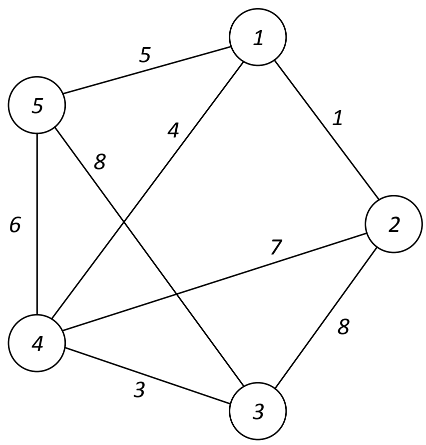

Рис. 1. Взвешенный неориентированный граф

Допустим, что необходимо нахождение кратчайшего пути из первой вершины в третью. Для этого, применяя стратегию построения и анализа всех возможных путей, необходимо построение и обход в глубину следующего комбинаторного дерева (рис. 2).

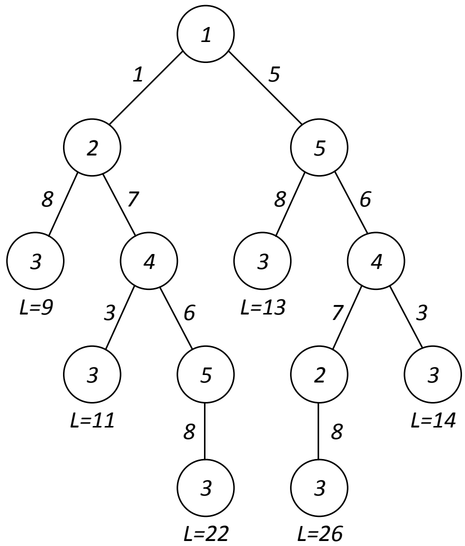

Рис. 2. Комбинаторное дерево, соответствующее графу на рис. 1 и возникающее в процессе поиска кратчайшего пути между вершинами 1 и 3

При поиске кратчайшего пути методом полного перебора производится построение всего множества путей

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 = [1, 2, 3], P_2 = [1, 2, 4, 3], P_3 = [1, 2, 4, 5, 3], \\ P_4 = [1, 5, 3], P_5 = [1, 5, 4, 2, 3], P_6 = [1, 5, 4, 3] \end{array} \right\},$$

оценка длины каждого из них и выбор оптимального пути $P^+ = P_1 = [1, 2, 3]$, длина которого $L(P_1) = 9$. При этом производится построение только допустимых путей, а не всех возможных перестановок номеров вершин, число которых равно $n!$, $n = N - 2$. При использовании стратегии ветвей и границ часть путей, текущая длина которых превышает текущий рекорд, может быть отброшена на ранних этапах, что в общем случае не спасает от необходимости обхода комбинаторного дерева в глубину.

Жадный подход в данной задаче выражается в попытке идти в ближайшую вершину из текущей, при этом производится обход лишь одной ветви дерева, а метод относится к классу последовательных. Для приведенного примера графа ей соответствует путь $P_2 = [1, 2, 4, 3]$, сопоставление длины которого $L(P_2) = 11$ с длиной оптимального пути наглядно показывает, что жадный подход далеко не всегда приводит к отысканию оптимального решения. Кроме того, в некоторых случаях жадный подход способен приводить в тупик (в данном случае в вершину, из которой невозможно попасть в конечную вершину) и при численной оценке качества решения имеет смысл говорить не только о степени субоптимальности полученного решения, но и о вероятности отыскания решения в принципе. Неоспоримым преимуществом жадного подхода являются малые затраты вычислительного времени.

Стратегия случайного перебора заключается в выборе случайного направления движения из текущей вершины, причем возможные направления движения выбираются равновероятно из множества нерассмотренных. Получаемое при этом решение соответствует одной из ветвей комбинаторного дерева, не являясь в общем случае ни жадным, ни оптимальным. Далее процесс отыскания случайного пути повторяется C раз (обычно $C \ll n!$ для большинства практически важных задач), а из найденных решений выбирается наилучшее. Увеличение числа итераций C приводит к линейному росту необходимых затрат вычислительного времени, причем зависимость качества решения от числа итераций имеет вид кривой, изображенной на рис. 3.

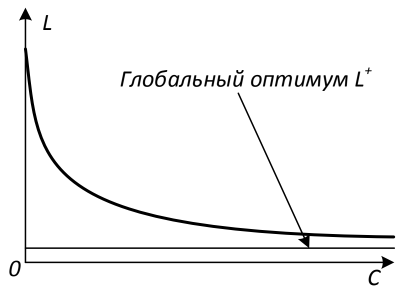

Рис. 3. Зависимость качества решения L от числа итераций C

С определенного момента увеличение числа итераций C приводит к незначительному изменению качества решения и может считаться нецелесообразным, а полученное качество решения как правило несколько отличается в худшую сторону от глобального оптимума $L^+ = L\left(P^+\right)$. В некоторых случаях подход не способен обеспечить нахождение решения. Данный итерационный подход требует в C раз больших временных затрат по сравнению с жадным, однако и качество решений оказывается более высоким. Кроме того, различные итерации алгоритма являются независимыми, что делает задачу слабосвязной и позволяет использовать для ее решения широкой спектр параллельных вычислительных средств.

Ввиду того, что при использовании стратегии случайного перебора производится равновероятный выбор направления движения из текущей вершины, данному подходу свойственны сравнительно низкая скорость сходимости решения к условному оптимуму и его невысокое качество (которое все же обычно выше, чем у полученного с использованием жадной стратегии), обусловленные довольно частым посещением «длинных» ребер графа в рассматриваемой задаче, которым в общем случае соответствуют далекие от оптимальных фрагменты решения. С целью снижения влияния указанного недостатка можно использовать комбинированную стратегию выбора направления движения, сочетающую в себе лучшие стороны жадного подхода и случайного перебора.

Следуя данной стратегии, именуемой в дальнейшем взвешенным случайным перебором, при выборе направления движения из текущей вершины $a_{тек}$ введем в рассмотрение критерий

$$F = f_i\left(1 + 2d\left(r - 0{,}5\right)\right), \tag{1}$$

где f_i – локальная оценка качества i-го направления движения (для рассматриваемой задачи $f_i = l\left(a_{тек}, a_i\right)$), d – величина относительного разброса значений вблизи локальной оценки, r – псевдослучайное число с равномерным распределением на отрезке $[0;1]$; минимальное значение критерия F будет соответствовать выбранному направлению движения. Итоговое решение будем формировать аналогично методу случайного перебора путем реализации C попыток движения по комбинаторному дереву с выбором наилучшего.

При $d = 0$ критерий (1) тождественно равен локальной оценке качества i-го направления движения f_i, а метод, основанный на его использовании, представляет собой жадный подход. При $d > 0$ в порядок выбора решения вмешивается случайная составляющая, причем диапазон изменения значения критерия F составляет случайную величину с равномерным распределением на отрезке $\left[f_i - f_i d;\, f_i + f_i d\right]$ (рис. 4).

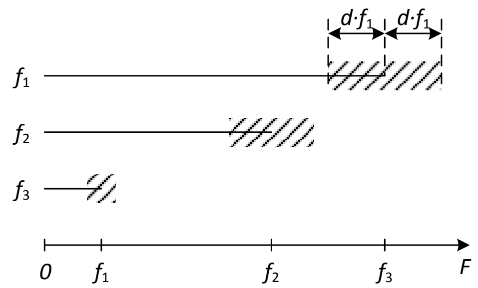

Рис. 4. Иллюстрация, поясняющая математическую запись критерия (1)

При малых значениях d отрезки, соответствующие диапазонам изменения значения критерия (1) для различных направлений движения, не перекрываются и метод по-прежнему реализует жадный подход. С ростом d отрезки начинают перекрываться, что реализует возможность выбора другого, не жадного, направления движения с некоторой вероятностью. При значениях $d \gg 1$ жадные оценки решения f_i не играют решающей роли при выборе направления движения, определяемого случайной составляющей, что делает метод похожим на случайный перебор (рис. 5).

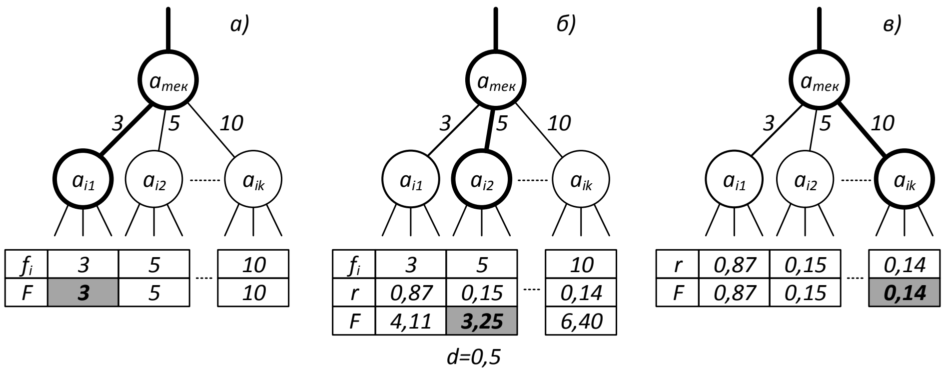

Рис. 5. Иллюстрация к выбору направления движения (а – жадный подход, б – взвешенный случайный перебор, в – случайный перебор)

Таким образом, метод, основанный на использовании локального критерия F представляет собой компромиссный вариант между жадным подходом и случайным перебором. Настроечным параметром в его составе является значение величины d, характеризующее относительную ширину отрезка значений критерия F. Вызывает интерес выявление оптимального значения величины d, для которого качество решений будет максимальным, а необходимое число итераций C – минимальным. Для этого был реализован соответствующий вычислительный эксперимент, в ходе которого производилась генерация выборки псевдослучайных неориентированных графов $S = \{G_1, G_2, ..., G_K\}$ объемом $K = 1\,000$ с числом вершин $N = 50$ и дуг $M = 2\,205$ (90% от максимально возможного), веса $l(v_i)$ которых выбирались псевдослучайно в диапазоне $[0;1]$. Для каждого графа псевдослучайно производился выбор начальной и конечной вершин и осуществлялся поиск кратчайшего пути с использованием алгоритмов, основанных на жадном, случайном и взвешенном случайном подходах. Качество оптимального решения оценивалось с использованием алгоритма Дейкстры [3]. Результаты известных подходов приведены в таблице 1, зависимости усредненного качества решений и числа итераций, необходимого для его отыскания при использовании взвешенного жадного подхода, от значения

d – на рис. 6, оценки относительных затрат вычислительного времени приведены в работе [18].

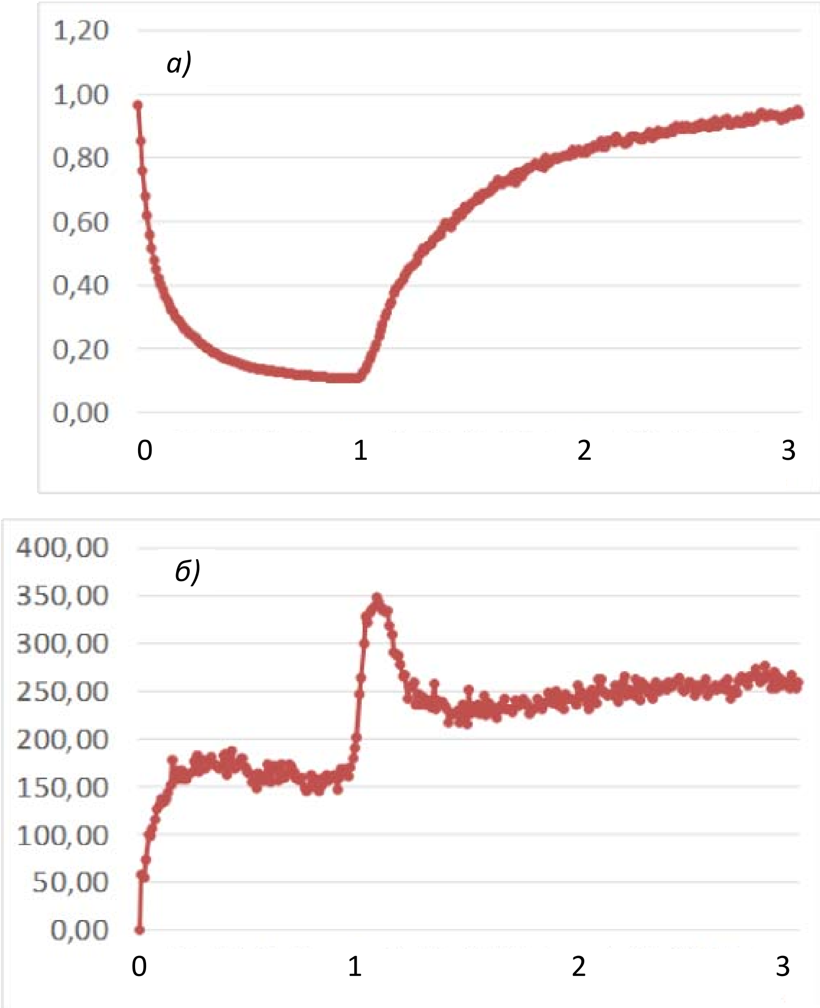

Рис. 6. Зависимости усредненного качества решений (а) и числа итераций (б) от величины относительного разброса d

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента

Метод	**Средняя длина пути**	**Проигрыш оптимальному решению**	**Число итераций**
Дейкстры	0,103	–	–
Жадный	0,956	9,3 раза	–

Случайный	0,275	2,7 раза	1 000
	0,207	2,0 раза	2 000
	0,172	1,7 раза	5 000
	0,163	1,6 раза	10 000
Взвешенный случайный $(d = 1)$	0,138	1,3 раза	не более 1 000, в среднем 202

При других исходных данных (число вершин и дуг в графе, использование ориентированных графов) экспериментальные кривые качественно остаются схожими. Полученные результаты позволяют сделать ряд выводов. Прежде всего, данные рис. 6 показывают, что оптимальным значением для величины относительного разброса является значение $d = 1$: усредненная длина путей с его использованием получается минимальной, а значение необходимого числа итераций – приемлемым. При уменьшении указанного значения в диапазоне $0,3 \le d \le 1$ число итераций остается практически неизменным при монотонном ухудшении интегрального качества решений. Значение в диапазоне $0 \le d \le 0,3$ характеризуется меньшим числом итераций, но еще худшими значениями интегрального качества решений, что по-видимому объясняется недостаточной степенью перекрытия интервалов критерия F и достаточно большой остаточной «жадностью» подхода. Значения в диапазоне $1 \le d \le 1,2$ приводят к резкому (до 3 раз) увеличению числа итераций при резком монотонном возрастании средней длины путей. При значениях $d > 1,2$ необходимое число итераций несколько снижается, а качество решений монотонно ухудшается. Подстановка полученного оптимального значения $d^* = 1$ в выражение (1) позволяет упростить критерий, используемый для выбора направления движения, до

$$F = f_i r$$

(константный множитель 2 опущен), что является нетривиальным следствием вычислительного эксперимента.

Решения, получаемые с использованием рассмотренного взвешенного случайного подхода, характеризуются существенно лучшей степенью близости к оптимуму и более высокой скоростью сходимости (соответственно, меньшими вычислительными затратами) по сравнению со случайным перебором. При этом задача остается слабосвязанной, что допускает ее эффективное распараллеливание.

Библиографический список

1. R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Technical Journal, 36 (1957), pp. 1389–1401.
2. Joseph. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem // Proc. AMS. 1956. Vol 7, No. 1. pp. 48–50.
3. E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs // Numerische Mathematik. V. 1 (1959), pp. 269–271.
4. R. Bellman. On a Routing Problem // Quarterly of Applied Mathematics. 1958. Vol 16, No. 1 (1958). pp. 87–90.
5. H. W. Kuhn. The Hungarian Method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. 2:83–97, 1955.
6. J. Munkres. Algorithms for the assignment and transportation problems // Journal of the society for industrial and applied mathematics, 5(1):32–38, 1957.
7. S. Cook. The complexity of theorem proving procedures // Proceedings of the third annual ACM symposium on theory of computing. pp. 151–158. 1971.
8. https://ru.wikipedia.org/wiki/Гамильтонов_граф

9. https://ru.wikipedia.org/wiki/Раскраска_графов
10. https://ru.wikipedia.org/wiki/Клика_(теория_графов)
11. https://ru.wikipedia.org/wiki/Разбиение_графа
12. https://ru.wikipedia.org/wiki/Изоморфизм_графов
13. Валяев В.В., Ватутин Э.И. Метод определения изоморфизма графов общего вида за полиномиальное время // Известия ЮЗГУ. Серия «Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение». № 2. Ч. 1. 2012. С. 200–206.
14. https://ru.wikipedia.org/wiki/Транспортная_задача
15. Ватутин Э.И., Зотов И.В., Сохен М.Ю., Титов В.С. Комбинаторно-логические задачи синтеза разбиений параллельных алгоритмов логического управления при проектировании логических мультиконтроллеров: монография / Курск: изд-во КурскГТУ, 2010. 200 с.
16. Ватутин Э.И. Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2011 г. 292 с. ISBN 978-3-8433-1728-3.
17. A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems // Econometrica 28 (3). pp. 497–520. 1960. DOI:10.2307/1910129.
18. Дремов Е.Н., Ватутин Э.И. Сравнение качества решений методов поиска кратчайшего пути в графе // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2013). Курск, изд-во ЮЗГУ, 2013. С. 249–251.