

ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА НАЧАЛЬНОГО ЦВЕТА НА КАЧЕСТВО РЕШЕНИЙ ДЛЯ МЕТОДА ВЗВЕШЕННОГО СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕБОРА ПРИ ПОИСКЕ РАСКРАСКИ ГРАФА

(Юго-Западный государственный университет, Курск)

В работе приводится описание эффекта выбора вероятности минимально допустимого или случайного цвета выбранной вершины на качество получаемых решений методом взвешенного случайного перебора поиска хроматического числа графа. Для разработанных программных реализаций приведены оценки временных затрат и скорости сходимости.

Существует большое количество практических задач, которые можно решить за полиномиальное время к задачам теории графов [1]. Одна из них – поиск оптимальной раскраски графа, которая может быть применена для разбиения графов, составления расписаний различного рода, компиляции программ, решения задач на базе латинских квадратов и пр.

Задача раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$, где $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ – множество вершин графа, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер, $M = |V|$ – общее число рёбер, в минимальное количество цветов относится к классу NP -полных. В некоторых случаях граф может не быть полносвязным, что свидетельствует об отсутствии связей между некоторыми парами вершин, при этом граф характеризуется значением «плотности» $d(G) = \frac{M}{N(N-1)}$ (данная характеристика является важной

в связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве, одной из координат которого в задачах на графах является плотность $d(G)$ этого графа [1, 2]). Необходимо найти такой набор цветов $X = \{x(a_1), x(a_2), \dots, x(a_N)\}$ (раскраску) для каждой вершины графа a_i , $x(a_i) \in C$, из множества цветов $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{\chi^*}\}$, чтобы $\chi^* = |C| \rightarrow \min$, причём смежные вершины графа не могут быть раскрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}): x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$. В случае нахождения оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G , а в случае нахождения суб- или квазиоптимальной – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$.

Для программной реализации данного метода необходимо вычислить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть раскрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильной рас-

краски, в этом случае такие цвета будем считать допустимыми (при нарушении условий поставленной задачи – недопустимыми). Для проверки работы метода берётся некая выборка из K графов $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$ и оценивается усред-

нённое качество решения $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^K Q(G_i)}{K}$, где $Q(G_i)$ – качество i -го решения и равно $\chi(G_i)$, обычно оно больше оптимума $\bar{Q} > Q^*$.

В простейшей реализации метода взвешенного случайного перебора вершины окрашиваются последовательно в том порядке, в каком они указаны в графе. В процессе разработки алгоритма было предложено реализовать ещё три различных способа обхода вершин неориентированного графа:

1. В случайном порядке: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A} \subseteq A$ выбирается случайная a_i , ей присваивается минимально допустимый цвет c_j .
2. В порядке уменьшения степеней вершин: из множества ещё не окрашенных вершин \tilde{A} выбирается такая a_i , у которой больше остальных связей с другими в матрице смежности (наибольшее возможное значение степени вершины $\rho(a_i) \leq N-1$) $\rho(a_i) \rightarrow \max$, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j .
3. В порядке возрастания количества допустимых цветов вершины: из множества ещё не окрашенных вершин \tilde{A} выбирается такая a_i , у которой имеется наименьшая мощность множества допустимых цветов $X(a_i) \subseteq X$, где $|X(a_i)| \rightarrow \min$, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j .

Ввиду того, что при переборе в порядке уменьшения степеней вершин или же возрастания количества допустимых цветов может возникать ситуация, при которой несколько вершин будут иметь равное значение степени либо количество допустимых цветов, было решено ввести дополнительный параметр метода: η – вероятность выбора минимально допустимого или случайного цвета для текущей вершины.

Зависимости средневывборочного хроматического числа χ^* и времени получения решения t от параметра η приведены на рис. 1 и 2. Вычислительный эксперимент проводился для $K = |\Lambda| = 250$ случайных графов выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0,777$, используя количество итераций $C_{\max} = 1000$ (здесь WRS_M0 – порядок перебора вершин по минимуму доступных цветов с назначением 1 цвета первой вершине; WRS_Max01 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине; WRS_Max11 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине и приме-

нением дополнительной сортировки (при одинаковых значениях степенях вершин будет выбрана та, которая имеет больше связей с уже окрашенными)).

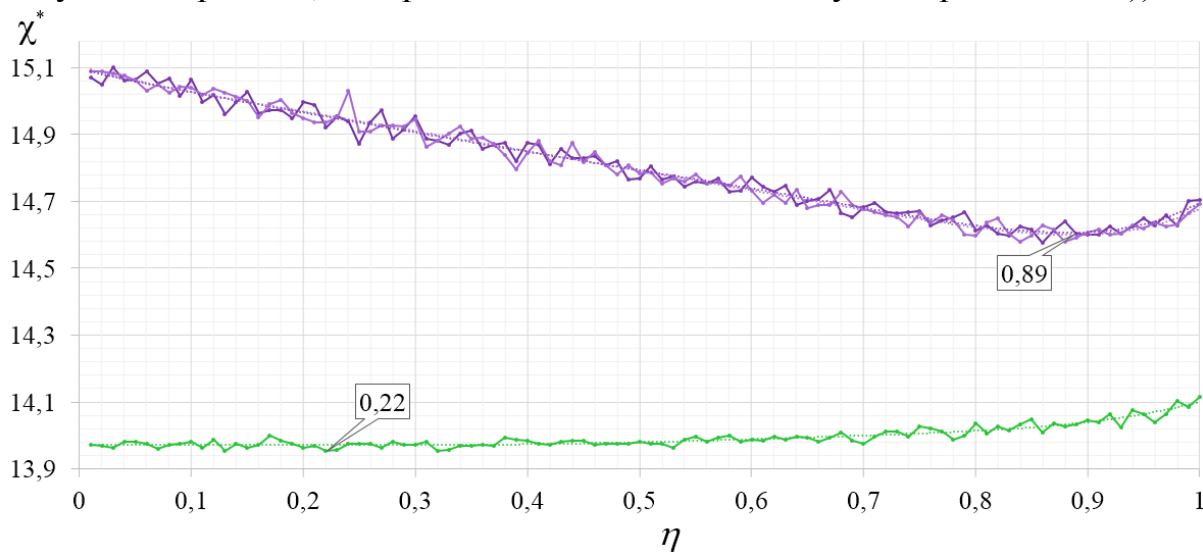


Рис. 1. Зависимость усреднённого хроматического от параметра η

В ходе проверки получены оптимальные значения параметра для данных реализаций: для WRS_Max01 и WRS_Max11 равно $\eta = 0,89$, для WRS_M0 случайная составляющая оказывает большее влияние на качество, чем жадная, т.о. за оптимальное значение принято $\eta = 0,22$. WRS_Max01 и WRS_Max11 практически не отличаются по качеству решения и по сравнению с WRS_M0 дают ухудшение качества на $\approx 4,6\%$ при полученных оптимальных значениях параметра. Для перебора по степеням вершин влияние параметра на качество решения является более выраженным, чем при переборе по минимуму допустимых цветов аналогично результатам работы [3], также выявлено, что для перебора по степеням вершин бассейн притяжения глобального оптимума параметра η для метода взвешенного случайного перебора не так сильно выражен, как для метода случайного перебора [3].

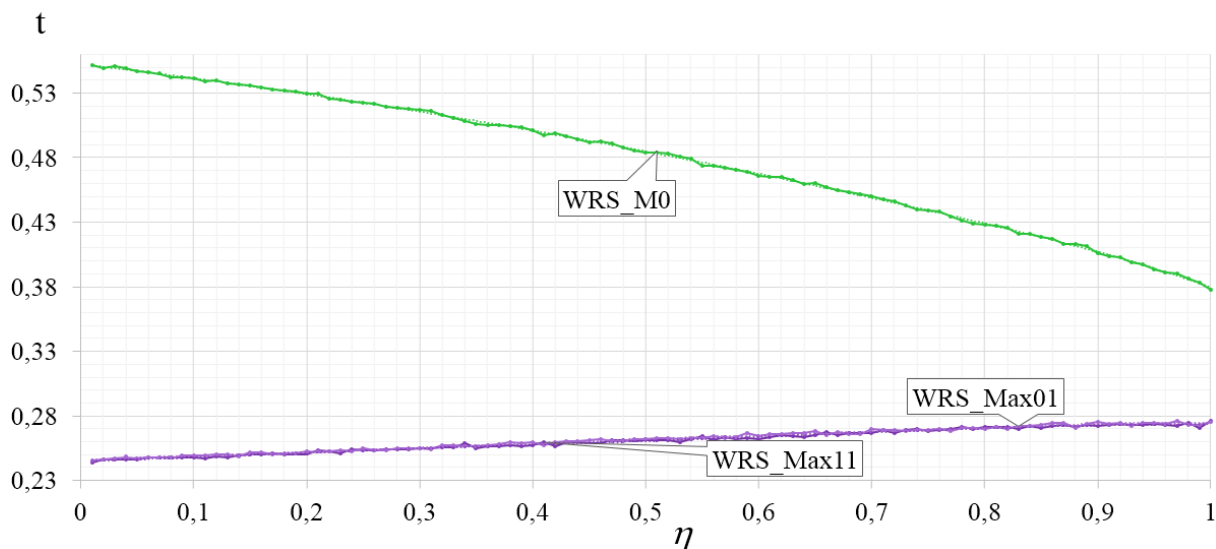


Рис. 2. Зависимость времени нахождения решения (в секундах) от параметра η

Для перебора по минимуму цветов временные затраты снижаются в $\approx 1,46$ раза при использовании жадного выбора по сравнению со случайным. Дополнительная сортировка при переборе по степеням вершин не оказывает влияния ни на качество получаемых решений, ни на время их генерации.

1. Ватутин Э.И. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. [Текст] / Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. – М.: Аргатак-Медиа, 2016. – 270 с.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. [Текст] – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 446 с.
3. Пшеничных А.О. О влиянии вероятности выбора минимально допустимого или случайного цвета для метода случайного перебора эвристической оценки хроматического числа графа [Текст] / Пшеничных А.О., Гвоздева С.Н., Панищев В.С., Ватутин Э.И // Интеллектуальные и информационные системы. – Тула: изд-во ТулГУ, 2019. – с. 59–63.