

Юго-Западный государственный университет
Кафедра вычислительной техники

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРОВ БЫСТРОВЫЧИСЛИМЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Курочкин И.И.,
Альбертьян А.М., Крипачев А.В., Пыхтин А.И.

Переславль-Залесский, 2022



Понятие ЛК и ДЛК

$$A = \| \| a_{ij} \| \|$$

$$i, j = \overline{1, N}$$

$$N = |S|$$

$$S = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$$\forall i, j, k = \overline{1, N}, j \neq k : (a_{ij} \neq a_{ik}) \wedge (a_{ji} \neq a_{ki})$$

$$\forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j : (a_{ii} \neq a_{jj}) \wedge (a_{N-i+1, N-i+1} \neq a_{N-j+1, N-j+1})$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	9	4	3	6	7	5	0	8
2	9	3	1	7	0	5	8	4	6
3	4	1	2	8	7	9	6	5	0
4	3	5	9	2	1	8	0	6	7
5	6	4	8	1	2	0	9	7	3
6	5	8	7	0	3	2	1	9	4
7	8	6	0	9	4	1	2	3	5
8	7	0	5	6	9	3	4	1	2
9	0	7	6	5	8	4	3	2	1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7	2	4	9	0	6	5	1	3	8
8	3	6	7	5	9	0	2	4	1
2	6	8	5	1	7	4	0	9	3
5	8	9	1	7	0	3	4	6	2
9	4	1	2	8	3	7	6	0	5
4	7	5	6	9	1	8	3	2	0
3	0	7	8	2	4	1	9	5	6
6	5	0	4	3	2	9	8	1	7
1	9	3	0	6	8	2	5	7	4

Нормализованный ЛК порядка 10 Нормализованный ДЛК порядка 10

$$N! \times (N-1)!$$

$$(N-1)!$$



Числовые характеристики ЛК/ДЛК

Быстровычисляемые:

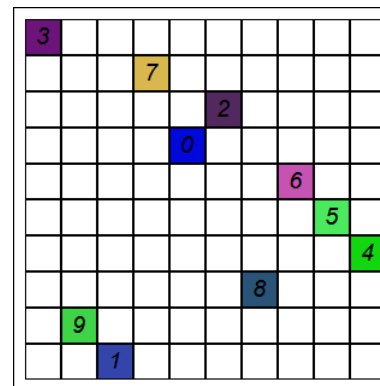
- число интеркалятов;
- число (диагональных) трансверсалей;

Относительно быстровычисляемые:

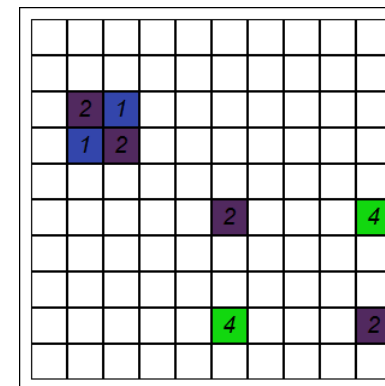
- число ОЛК/ОДЛК.

Не быстровычисляемые:

- число полных/частичных циклов;
- число тривиальных/нетривиальных латинских подпрямоугольников;
- мощность главного класса;
- ...



Пример трансверсали



Пример интеркалятов



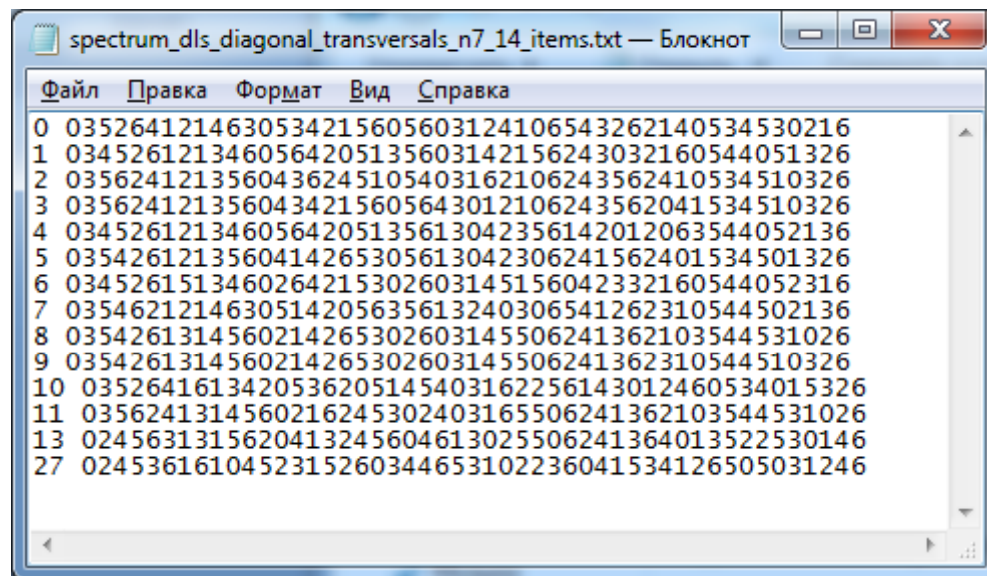
Понятие спектров числовых характеристик

Спектр S — множество числовых значений выбранной числовой характеристики X комбинаторных объектов заданного типа.

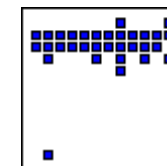
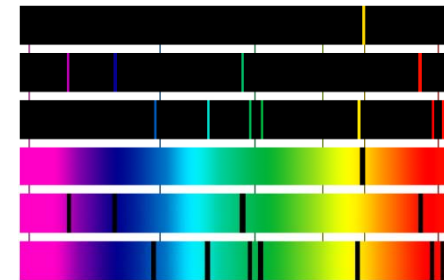
Пример:

- тип комбинаторных объектов — ДЛК порядка 7;
- числовая характеристика — число диагональных трансверселей.

$$S_{dt, DLS7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 27\}$$



```
spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
0 0352641214630534215605603124106543262140534530216
1 0345261213460564205135603142156243032160544051326
2 0356241213560436245105403162106243562410534510326
3 0356241213560434215605643012106243562041534510326
4 0345261213460564205135613042356142012063544052136
5 0354261213560414265305613042306241562401534501326
6 0345261513460264215302603145156042332160544052316
7 0354621214630514205635613240306541262310544502136
8 0354261314560214265302603145506241362103544531026
9 0354261314560214265302603145506241362310544510326
10 0352641613420536205145403162256143012460534015326
11 0356241314560216245302403165506241362103544531026
13 0245631315620413245604613025506241364013522530146
27 0245361610452315260344653102236041534126505031246
```



http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_diagonal_transversals_n7_14_items.txt



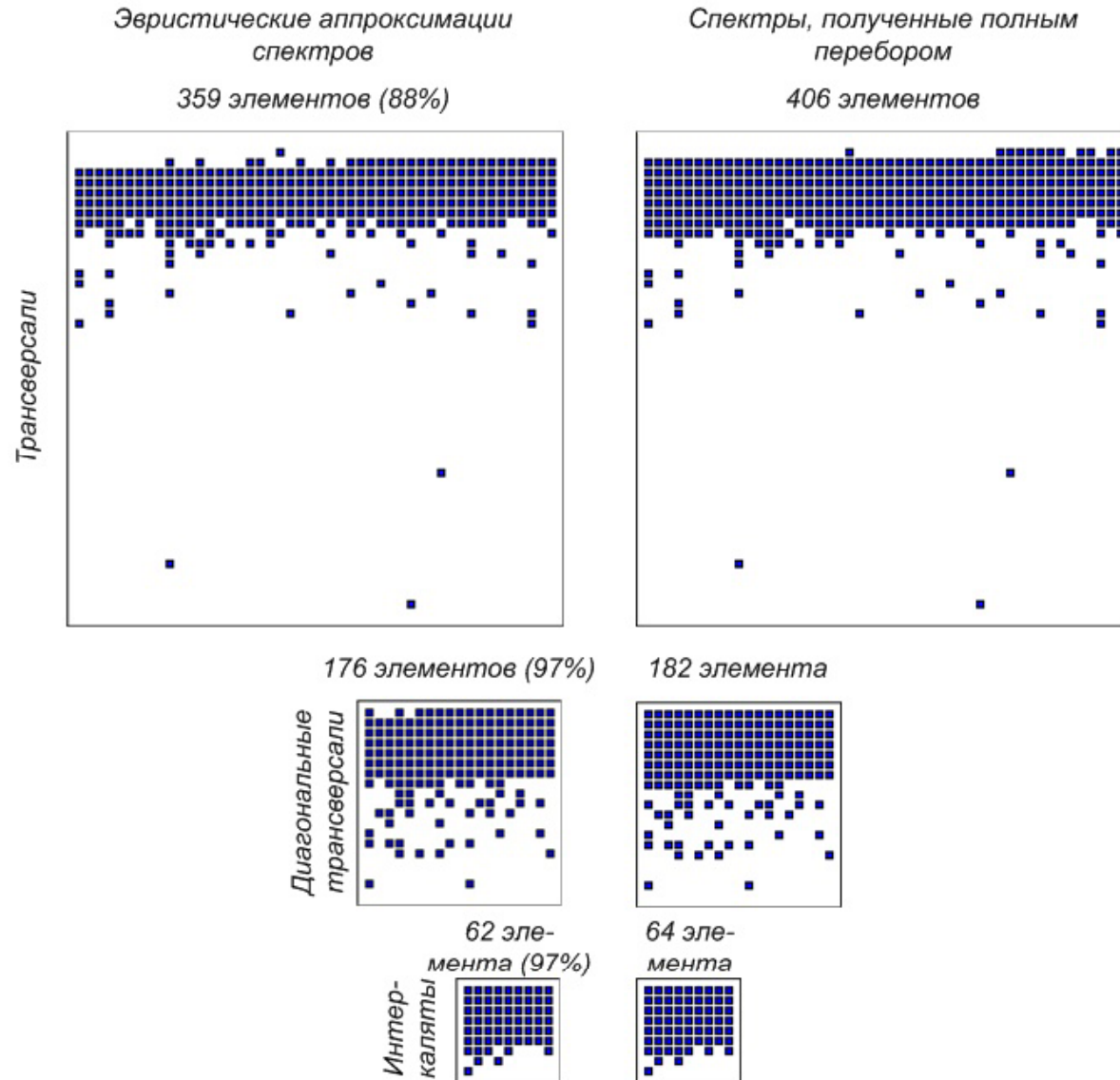
Построение спектров полным перебором

<i>Порядок ДЛК</i>	<i>1</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
<i>Трансверсали</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>
<i>Диагональные трансверсали</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>
<i>Интеркаляты</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>
<i>ОДЛК</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>	<i>BF</i>

- вычислительный эксперимент для порядка $N=9$ потребовал 5 месяцев расчета на грид (Gerasim@Home + RakeSearch) при реальной производительности проектов порядка 7—8 TFLOP/s и параллельно работающих подпроектах



Оценка эффективности эвристических методов аппроксимации на примере спектров порядка $N=9$





Общая стратегия эвристического построения спектров

- формирование опорного спектра;
- расширение опорного спектра.

Опорные спектры:

- от ДЛК другого спектра (например, построение спектра трансверселей по спектру диагональных трансверселей);
- от ДЛК какого-либо специального типа (ДЛК Брауна, Гергели, (полу)циклические ДЛК, ...).

Методы расширения спектров:

- анализ окрестностей от поворота 1 интеркалята/цикла;
- диагонализация.



Построение окрестностей

0	6	9	1	3	4	A	5	2	7	B	8
2	1	3	0	B	8	5	A	9	4	6	7
5	3	2	4	8	9	1	B	6	A	7	0
6	7	8	3	A	B	9	4	0	5	2	1
1	A	B	7	4	0	8	9	5	6	3	2
7	2	A	8	9	5	4	6	1	B	0	3
8	B	0	A	5	7	6	2	3	1	9	4
9	8	5	6	2	3	B	7	4	0	1	A
A	9	6	B	7	2	0	1	8	3	4	5
B	4	1	5	0	A	2	3	7	9	8	6
4	5	7	2	1	6	3	0	B	8	A	9
3	0	4	9	6	1	7	8	A	2	5	B

Пример ДЛК (2124
диагональных
трансерсали)

Окрестность от поворота 1 интеркалята (10
ДЛК):

```
111.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
0691345A27B82130V8A594675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
096134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
069174A523B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
069134A527B82130V85A94678324591B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
069134A527B82130V85A94675326891B4A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
069134A527B82130V85A94675324891B6A706743AB9805211AB74089563272A895461B03
069134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9402511AB74089563272A895461B03
069134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB54089763272A895461B03
069134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895431B06
069134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B03
```

Спектр от окрестности (5 элементов):

```
222.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
2023 069134A527B82130V85A94675326891B4A706783AB9405211AB74089563272A8954
2060 069174A523B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A8954
2069 0691345A27B82130V8A594675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A8954
2072 069134A527B82130V85A94678324591B6A706783AB9405211AB74089563272A8954
2130 096134A527B82130V85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A8954
```

- ДЛК в составе окрестностей близки друг в другу по Хэммингу и по значениям числовых характеристик

Построение окрестностей

0	6	9	1	3	4	A	5	2	7	B	8
2	1	3	0	B	8	5	A	9	4	6	7
5	3	2	4	8	9	1	B	6	A	7	0
6	7	8	3	A	B	9	4	0	5	2	1
1	A	B	7	4	0	8	9	5	6	3	2
7	2	A	8	9	5	4	6	1	B	0	3
8	B	0	A	5	7	6	2	3	1	9	4
9	8	5	6	2	3	B	7	4	0	1	A
A	9	6	B	7	2	0	1	8	3	4	5
B	4	1	5	0	A	2	3	7	9	8	6
4	5	7	2	1	6	3	0	B	8	A	9
3	0	4	9	6	1	7	8	A	2	5	B

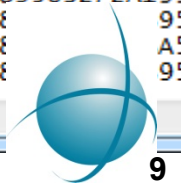
Пример ДЛК (2124
диагональных
трансерсали)

Окрестность от поворота 1 цикла (32 ДЛК):

```
111.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
960134A527B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A805461B9
169034A527B82031B85A94675324891B6A706783AB9405210AB74189563272A895461B0
869134A527B02138B05A94675324091B6A786703AB9485211AB74809563272A095461B8
096134A527B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B0
069134A257B85130B82A94672354891B6A706783AB9405211AB74089263575A892461B0
069134A527B82130B85A94676324891B5A705783AB9406211AB74089653272A895461B0
064139A527B82130B85A94675329841B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B0
06A1349527B82130B85A94675324891B6A7067839BA405211AB7408956327298A5461B0
069134A527B82130B85A94678324591B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B0
069134A527B82130B85A64975324861B9A709783AB6405211AB74086593272A865491B0
069834A527B12830B15A94675324891B6A706713AB9405281AB74089563272A195468B0
...
069134A527B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895461B0
```

Спектр от окрестности (12 элементов):

```
222.txt — Блокнот
Файл  Правка  Формат  Вид  Справка
1991 169034A527B82031B85A94675324891B6A706783AB9405210AB74189563272A895
2006 069134A527B82130B85A94676324891B5A705783AB9406211AB74089653272A895
2023 069134A527B82130B85A94675326891B4A706783AB9405211AB74089563272A895
2035 960134A527B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A805
2039 869134A527B02138B05A94675324091B6A786703AB9485211AB74809563272A095
2060 069174A523B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895
2069 069134A527B82130B8A594675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895
2072 069134A527B82130B85A94678324591B6A706783AB9405211AB74089563272A895
2079 069834A527B12830B15A94675324891B6A706713AB9405281AB74089563272A195
2095 064139A527B82130B85A94675329841B6A706783AB9405211AB74089563272A895
2102 06A1349527B82130B85A94675324891B6A7067839BA405211AB74089563272A895
2130 096134A527B82130B85A94675324891B6A706783AB9405211AB74089563272A895
```

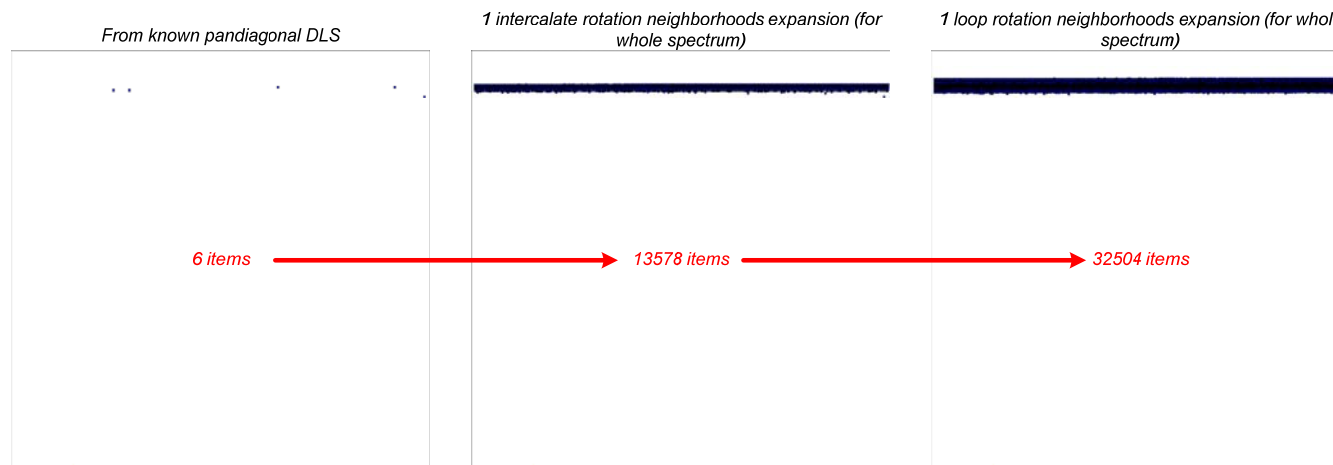


Метод расширения спектра целиком (сокр. М1)

- выбрать очередной нерассмотренный квадрат спектра;
- построить по нему заданную окрестность из ДЛК;
- рассчитать значения числовых характеристик для ДЛК в составе окрестности;
- новые значения добавить в спектр.

Итеративно повторять указанные выше действия до тех пор, пока есть нерассмотренные квадраты в спектре.

Пример: опорный спектр числа трансверселей от пандиагональных ДЛК порядка 13 → расширение спектра целиком вращением 1 интеркалята → расширение спектра целиком вращением 1 цикла.



Построение спектров: M1

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M1	M1	M1	M1	To Do	To Do	x
Диагональные трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M1	M1	M1	M1	M1	M1	x
Интеркаляты	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M1	M1	M1	M1	To Do	To Do	...
ОДЛК	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	s	s	s	To Do	x?	x?	

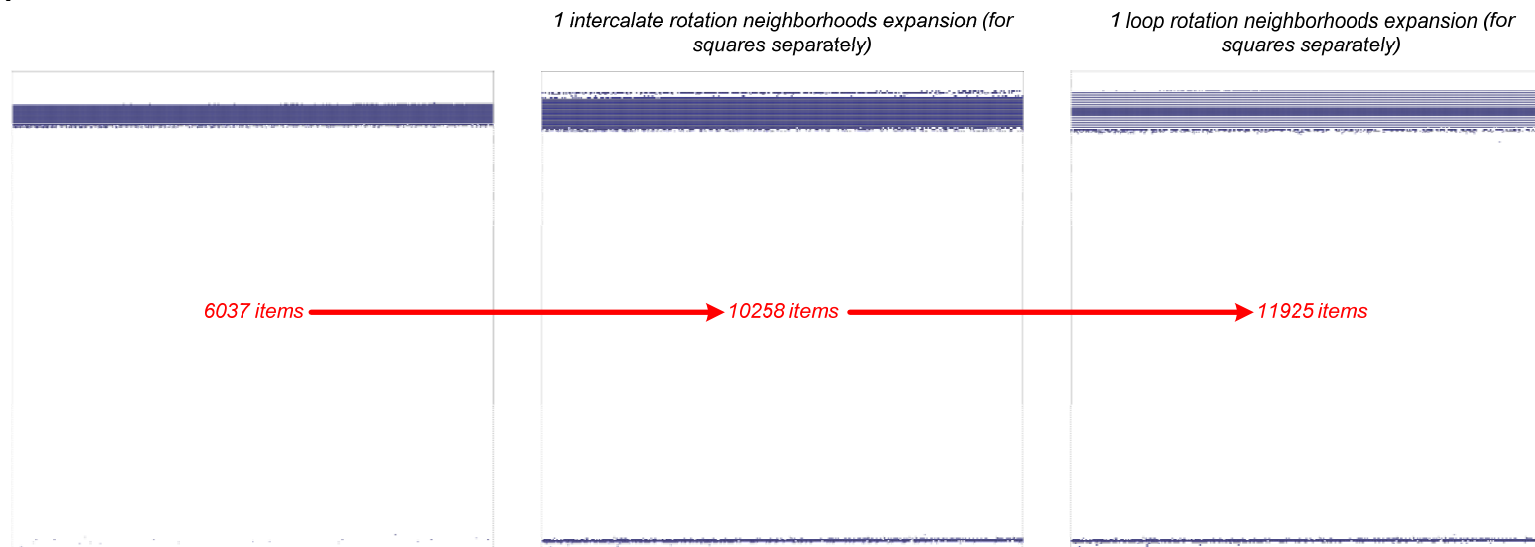


Метод поквadratного расширения спектра (сокр. М2)

- выбрать очередной нерассмотренный квадрат опорного спектра;
- добавить его в новый спектр;
- расширить новый спектр с использованием метода М1.

Итеративно повторять указанные выше действия до тех пор, пока есть нерассмотренные квадраты в опорном спектре.

Пример: опорный спектр числа диагональных трансверсалей от пандиагональных ДЛК порядка 13 → поквadratное расширение спектра вращением 1 интеркалята → поквadratное расширение спектра вращением 1 цикла.



Сравнение эффективности M1 и M2

- M2 дает существенно более мощные спектры по сравнению с M1;
- M2 требует существенно **больших** вычислительных затрат по сравнению с M1 (его использование допустимо не для всех размерностей N).

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x
Диагональные трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M2	M1	M1	x
Интеркаляты	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...
ОДЛК	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	s	s	s	To Do	x?	x?	

- в перспективе планируется разработка других методов (комбинация преобразований в случайном порядке, построение младших/старших частей спектров, жадное (G)/случайное (RW) движение по ДЛК, случайное движение по ОДЛК в составе огромных комбинаторных структур)



Более детальное представление экспериментов

Порядок ДПК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x
Диагональные трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M2	M1	M1	x
Интеркаляты	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...
ОДПК	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	s	s	s	To Do	x?	x?	

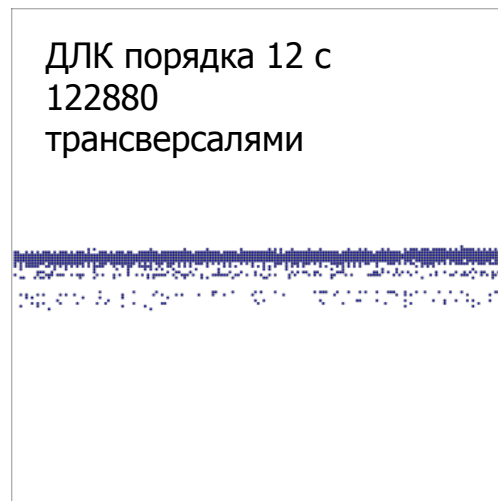
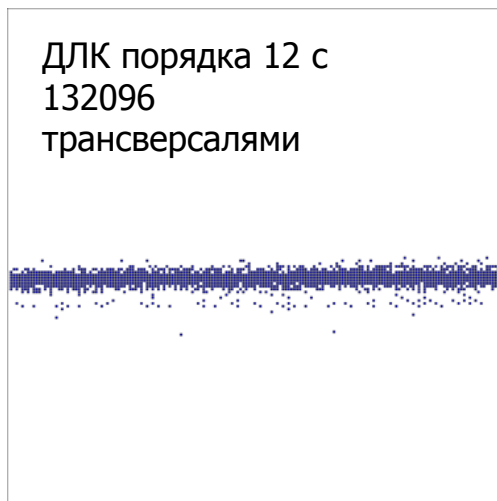
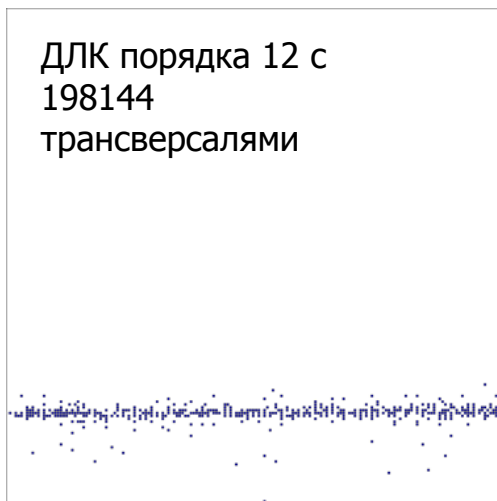


Диагонализация (сокр. d)

- выбрать очередной нерассмотренный квадрат спектра;
- выполнить его диагонализацию с получением коллекции ДЛК;
- рассчитать значения числовых характеристик для ДЛК в составе коллекции;
- новые значения добавить в спектр.

Итеративно повторять указанные выше действия до тех пор, пока есть нерассмотренные квадраты в спектре.

Пример: диагонализация ДЛК порядка 12 с различным числом трансверселей с получением «полос» в спектре числа диагональных трансверселей.



Диагонализация: апробация

Порядок ДЛК	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M1	To Do	To Do	x
Диагональные трансверсали	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	d	d	d	To Do	To Do	To Do	x
Интеркаляты	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	M2	M2	M2	M2	To Do	To Do	...
ОДЛК	BF	BF	BF	BF	BF	BF	BF	s	s	s	To Do	x?	x?	

- прямое применение: наполнение спектров числа диагональных трансверсалей;
- долго для порядков $N > 11$ ($N=12$ — до 7 суток на «тяжелый» квадрат с 198144 трансверсалими, $N=13$ — более 4 часов на «самые легкие» квадраты), в перспективе необходимо распараллеливание;
- усиление минимумов (в комбинации с анализом окрестностей);
- получение/усиление максимумов (для некоторых размерностей).




Новые результаты (по сравнению с НСКФ — 2021)

Мощности аппроксимаций спектров:

- трансверсали в ДЛК:
 - $a(9) \geq 359 \rightarrow a(9) = 406$, $a(10) \geq 442$, $a(11) \geq 1158 \rightarrow a(11) \geq 5081$,
 $a(12) \geq 22407 \rightarrow a(12) \geq 23113$, ? $\rightarrow a(13) \geq 74315$
- диагональные трансверсали в ДЛК:
 - $a(9) \geq 176 \rightarrow a(9) = 182$, $a(10) \geq 736$, $a(11) \geq 353 \rightarrow a(11) \geq 1242$,
 $a(12) \geq 17641 \rightarrow a(12) \geq 17693$, ? $\rightarrow a(13) \geq 12050$, ? \rightarrow
 $a(14) \geq 281067$, ? $\rightarrow a(15) \geq 1958394$
- интеркаляты в ДЛК:
 - $a(9) \geq 62 \rightarrow a(9) = 64$, $a(10) \geq 88$, $a(11) \geq 100$, $a(12) \geq 210$, ? \rightarrow
 $a(13) \geq 152$
- число ОДЛК в ДЛК:
 - $a(10) \geq 10$, $a(11) \geq 36 \rightarrow a(11) \geq 39$, $a(12) \geq 2782 \rightarrow a(11) \geq 4930$





Усиление известных верхних/нижних границ с использованием алгоритмов построения спектров (по сравнению с НСКФ — 2021)

Минимальное число трансверсалей в ДЛК (**A287645**):

$$a(11) \leq 1721, a(12) \leq 448, a(13) \leq 43866, a(14) \leq 65432, a(15) \leq 215721, \\ a(16) \leq 7465984$$

Максимальное число трансверсалей в ДЛК (**A287644**):

$$a(14) \geq 3477504, a(15) \geq 36362925, a(16) \geq 244744192$$

Минимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A287647**):

$$a(11) \leq 145, a(12) = 0, a(13) \leq 4903, a(14) \leq 6106, a(15) \leq 15510, a(16) \leq 898988, \\ a(17) \leq 12058840, a(18) \leq 82577875, a(19) \leq 592174879, a(20) \leq 4488686380$$

Максимальное число диагональных трансверсалей в ДЛК (**A287648**):

$$a(14) \geq 488792, a(15) \geq 4620434, a(18) \geq 281593874$$

Максимальное число интеркалятов в ДЛК (**A307164**):

$$a(13) \geq 156$$





Новые результаты

Мощности аппроксимаций спектров:

- трансверсали в ОДЛК (**A350585**):
 - $a(10) \geq 193$, $a(11) \geq 3578$, $a(12) \geq 6116$
- диагональные трансверсали в ОДЛК (**A349199**):
 - $a(10) \geq 390$, $a(11) \geq 390$, $a(12) \geq 8995$
- интеркаляты в ОДЛК (**A354050**):
 - $a(10) \geq 72$, $a(11) \geq 76$, $a(12) \geq 177$



Верхние/нижние границы быстроисчисляемых числовых характеристик ОДЛК

Минимальное число трансверсалей в ОДЛК (**A357514**):

$$a(10) \leq 668, a(11) \leq 2091, a(12) \leq 6240$$

Максимальное число трансверсалей в ОДЛК (**A287644**):

$$a(14) \geq 3477504, a(15) \geq 36362925, a(16) \geq 244744192$$

Минимальное число диагональных трансверсалей в ОДЛК (**A354068**):

$$a(12) \leq 588, a(13) \leq 9610$$

Максимальное число диагональных трансверсалей в ОДЛК (**ToDo**):

$$a(11) \geq 4828, a(12) \geq 30192$$

Минимальное число интеркалятов в ОДЛК (**ToDo**):

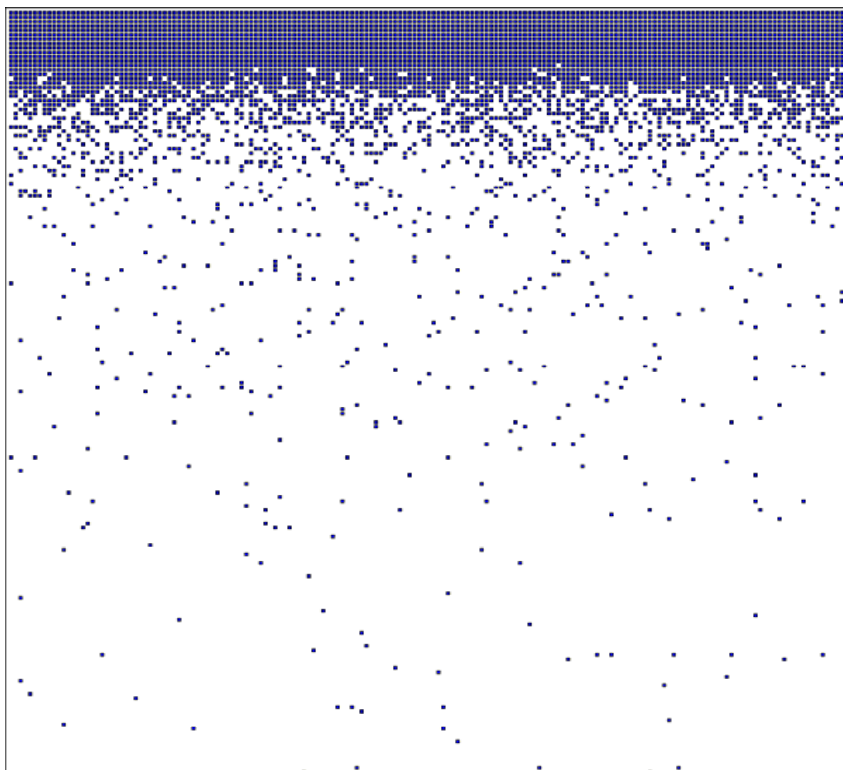
$$a(10) \leq 2, a(11) = 0, a(12) \leq 4, a(13) = 0$$

Максимальное число интеркалятов в ОДЛК (**ToDo**):

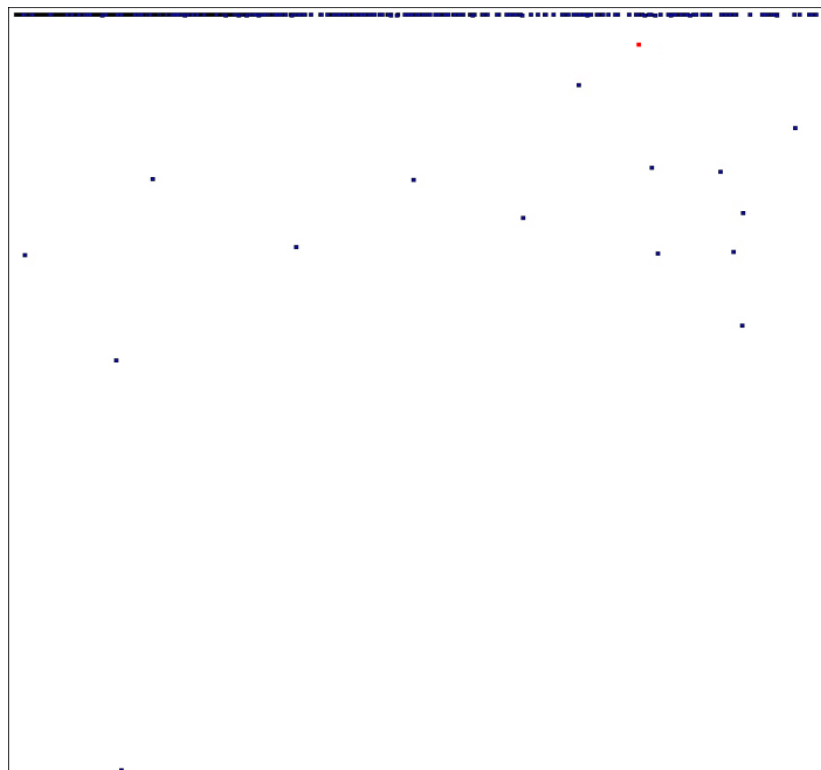
$$a(10) \geq 75, a(11) \geq 94, a(12) \geq 252, a(13) \geq 26$$



Аппроксимация спектра числа ОДЛК в ДЛК порядка 12

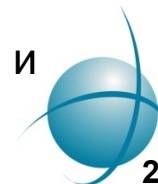


Младшая часть спектра (значения до 30 тыс. ОДЛК)



Спектр целиком

- мощность спектра в настоящее время — 4897 элементов;
- построение младшей части производится в 1 поток на Core i7 4770;
- построение старшей части производится поквратно в проектах Gerasim@Home и RakeSearch для ДЛК с большим числом диагональных трансверселей;
- <http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum dls odls n12 xxxx known items.txt>





Gerasim@Home
Distributed computing project
Managed by BOINC.RU community
With support of Southwest State University, Department of Computer Sciences (kvt)

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	
4	2	3	0	1	3	4	1	2	0	4	2	3	0	1	3	4	0	1	2	0
3	4	1	2	0	2	0	4	1	3	1	2	3	4	0	2	3	4	0	1	2
1	3	0	4	2	1	3	0	4	2	1	3	0	4	2	1	3	0	4	2	1
2	0	4	1	3	2	0	4	1	3	2	0	4	1	3	2	0	4	1	3	2

Спасибо за внимание!

Выражаем благодарность всем добровольцам, принимающим участие в проектах добровольных распределенных вычислений Gerasim@home и RakeSearch!

WWW: <http://evatutin.narod.ru>, <https://gerasim.boinc.ru>,
<https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>

E-mail: evatutin@rambler.ru

