А.О. Пшеничных, Э.И. Ватутин

ВЛИЯНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫБОРА МИНИМАЛЬНО ДОПУСТИМОГО ИЛИ СЛУЧАЙНОГО ЦВЕТА ДЛЯ ЖАДНОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА

(Юго-Западный государственный университет, Курск)

В работе приводится описание влияния цвета первой вершины на качество решений жадного метода поиска хроматического числа графа. Для разработанных программных реализаций приведены оценки временных затрат и скорости сходимости.

Существует большое количество практических задач, которые можно свети к задачам теории графов [1]. Одна из них – раскраска графа в минимальное количество цветов, которая может быть использована при разбиении графов, составлении расписаний, компиляции программ, решении задач на базе латинских квадратов и пр.

Решение задачи раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$ в минимальное количество цветов относится к классу NP-полных задач, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ – множество вершин графа, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер, $M = |V|$ – общее число рёбер. В некоторых случаях граф может не быть полносвязным, что соответствует отсутствию связей между некоторыми парами вершин, при этом граф характеризуется значением «плотности» $d(G) = \dfrac{M}{N(N-1)}$ (данная характеристика является важной в связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве, одной из координат которого в задачах на графах является плотность $d(G)$ этого графа [1, 2]). Необходимо найти такой набор цветов $X = \{x(a_1), x(a_2), \ldots, x(a_N)\}$ (раскраску) для каждой вершины графа a_i, $x(a_i) \in C$, из множества цветов $C = \left\{c_1, c_2, \ldots, c_{\chi^*}\right\}$, чтобы $\chi^* = |C| \to \min$, причём смежные вершины графа не могут быть раскрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}) : x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$. В случае нахождения оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, а в случае нахождения суб- или квазиоптимальной – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$.

Для программной реализации данного метода необходимо вычислить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть раскрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильной раскраски, в этом случае такие цвета будем считать допустимыми (при нарушении условий поставленной задачи – недопустимыми). Для проверки работы метода берётся некая выборка из K графов $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_K\}$ и оценивается усреднённое качество решения $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{K} Q(G_i)}{K}$, где $Q(G_i)$ – качество i-го решения и равное $\chi(G_i)$, обычно оно больше оптимума $\bar{Q} > Q^*$.

В простейшей реализации жадного метода вершины перебираются последовательно в том порядке, в каком они указаны в графе. В процессе разработки алгоритма было предложено реализовать ещё три различных способа обхода вершин неориентированного графа:

1. В случайном порядке: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A} \subseteq A$ выбирается случайная a_i, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.
2. В порядке уменьшения степеней вершин: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается такая a_i, у которой больше остальных связей с другими в матрице смежности (наибольшее возможное значение степени вершины $\rho(a_i) \le N-1$) $\rho(a_i) \to \max$, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.
3. В порядке возрастания количества допустимых цветов вершины: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается такая a_i, у которой имеется наименьшая мощность множества допустимых цветов $X(a_i) \subseteq X$, где $|X(a_i)| \to \min$, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.

Ввиду того, что при переборе в порядке уменьшения степеней вершин либо возрастания количества допустимых цветов может возникать ситуация, в которой несколько вершин будут иметь одинаковое значение степени или количество допустимых цветов, было решено ввести дополнительный параметр метода: η – вероятность выбора минимально допустимого или случайного цвета для текущей вершины.

Зависимости средневыборочного хроматического числа χ^* и времени получения решения t от параметра η приведены на рис. 1 и 2. Вычислительный эксперимент проводился для $K = |\Lambda| = 250$ случайных графов выборки $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_K\}$ графов с псевдослучайной структурой размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0{,}777$, используя количество итераций $C_{\max} = 1000$ (здесь Gr_M1 – порядок перебора вершин по минимуму доступных цветов с последовательным назначением N цветов первой вершине; Gr_Max01 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине; Gr_Max11 – порядок перебора вершин по степеням вершин с последовательным назначением N цветов первой вершине и применением дополнительной сортировки (при одинаковых значениях степенях вершин будет выбрана та, которая имеет больше связей с уже окрашенными)).

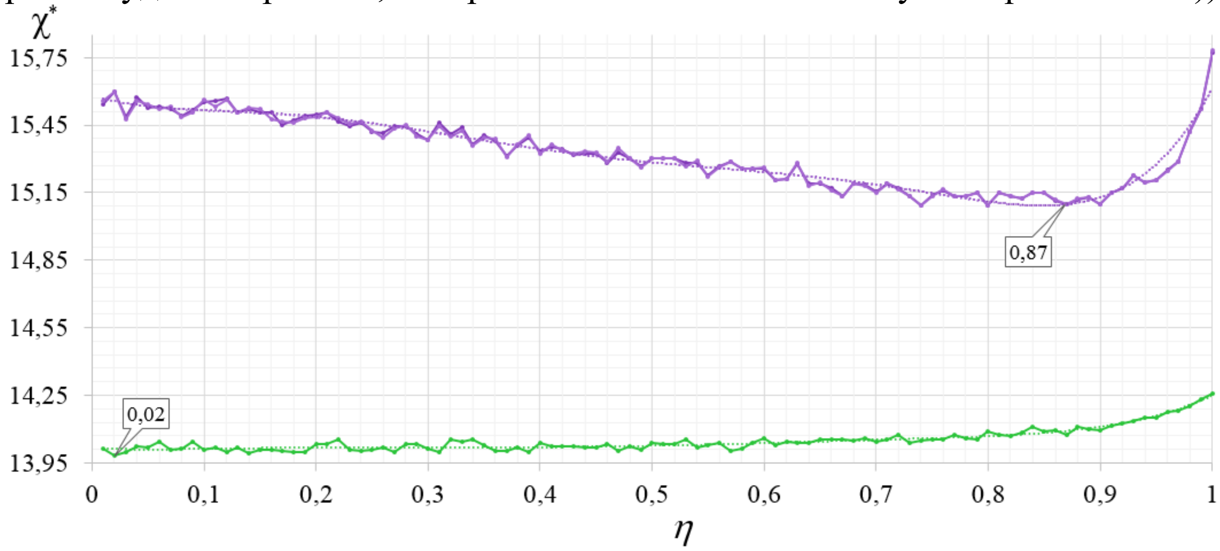

Рис. 1. Зависимость усреднённого хроматического от параметра η

В ходе проверки получены оптимальные значения параметра для данных реализаций: для Gr_Max01 и Gr_Max11 равно $\eta = 0{,}87$, для Gr_M1 случайная составляющая оказывает бóльшее влияние на качество, чем жадная, т.о. за оптимальное значение принято $\eta = 0{,}02$. Gr_Max01 и Gr_Max11 практически не отличимы по качеству решения и по сравнению с Gr_M1 дают ухудшение качества на $\approx 8\%$ при полученных оптимальных значениях параметра. Для перебора по степеням вершин влияние параметра на качество решения является более выраженным, чем при переборе по минимуму допустимых цветов.

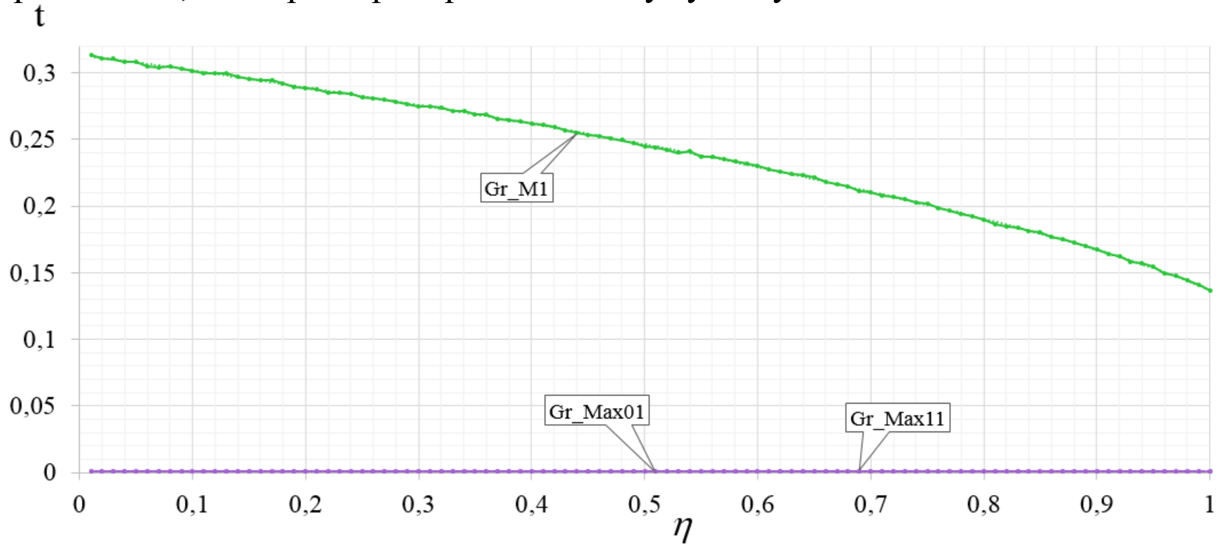

Рис. 2. Зависимость времени нахождения решения (в секундах) от параметра η

Для перебора по минимуму цветов временные затраты снижаются в $\approx 2{,}3$ раза при использовании жадного выбора по сравнению со случайным. Дополнительная сортировка при переборе по степеням вершин не оказывает влияния ни на качество получаемых решений, ни на время их генерации.

---

1. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.