УДК 519.17

А.О. ПШЕНИЧНЫХ, С.Н. ГВОЗДЕВА, Э.И. ВАТУТИН

О ВЛИЯНИИ ПОРЯДКА РАССМОТРЕНИЯ ВЕРШИН ПРИ ПОИСКЕ РАСКРАСОК ГРАФОВ ОБЩЕГО ВИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

В данной статье приводится описание программной реализации жадного метода в задаче поиска хроматического числа графа, относящейся к классу сложности NP. Многие практически важные задачи можно свести к задачам теории графов, а некоторые из них – к задаче раскраски графа. Используя жадные методы, можно довольно быстро получать решения поставленной задачи, однако их качество может являться далёким от оптимума. Поэтому при применении жадного метода на практике часто появляется необходимость соблюдать баланс между скоростными характеристиками метода (временем получения решений) и качеством получаемых решений. Для повышения качества получаемых данным методом решений был предложен ряд изменений. В статье приведены результаты вычислительного эксперимента, целью которого было выявление влияния цвета первой вершины на качество решения, а также на время, необходимое для его формирования. Приведены результаты влияния на качество и время решения четырёх различных вариантов обхода вершин графа для жадного метода, включающие в себя: прямой перебор (в том порядке, в каком они указаны в графе); в случайном порядке; в порядке уменьшения степеней вершин; в порядке увеличения количества допустимых цветов.

Ключевые слова: *хроматическое число графа, эвристические методы, жадные методы, раскраска графа, теория графов.*

Введение

Существует большое количество практических задач, которые можно свести к задачам теории графов. Одна из них – раскраска графа в минимальное количество цветов [1], применяемая при разбиении графов [2, 3], составлении расписаний, компиляции программ [4], решении задач на базе латинских квадратов [5] и пр. Многие другие известные задачи дискретной комбинаторной оптимизации допускают полиномиальную сводимость к ней. Данная задача относится к классу NP [6] и не допускает получение точного решения за разумное время для задач практически важной размерности, поэтому нахождение подходящего эвристического метода, дающего неплохое качество решения за минимальное время, является актуальной задачей.

В данной работе основное внимание уделено анализу возможностей жадного метода [7, 8] на примере решения задачи раскраски неориентированного графа $G = \langle A, V \rangle$ в минимальное количество цветов, где $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ – множество вершин, $N = |A|$ – число вершин, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_M\} \subseteq A \times A$ – множество рёбер, $M = |V|$ – число рёбер, относящейся к классу NP. В некоторых случаях граф может не быть полносвязным, что соответствует отсутствию ребер между некоторыми парами вершин, при этом он характеризуется значением «плотности» $d(G) = \dfrac{M}{N(N-1)}$ (данная характеристика является важной в связи с тем, что качество работы эвристических методов зависит от области в некотором многомерном пространстве, одной из координат которого в задачах на графах является плотность $d(G)$). Необходимо найти такой набор цветов $X = \{x(a_1), x(a_2), \ldots, x(a_N)\}$ (раскраску) для каждой вершины графа a_i, $x(a_i) \in C$, из множества цветов $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{\chi^*}\}$, чтобы $\chi^* = |C| \to \min$, причём смежные вершины графа не могут быть раскрашены в одинаковые цвета: $\forall v_i = (a_{i_1}, a_{i_2}) : x(a_{i_1}) \neq x(a_{i_2})$. В случае нахождения оптимальной раскраски $\chi^*(G) = \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G, а в случае нахождения суб- или квазиоптимальной раскраски – $\chi^*(G) \geq \chi(G)$. При программной реализации данного метода необходимо вычислить минимально возможную мощность множества цветов $|C|$, в которые могут быть раскрашены вершины заданного графа без нарушения условий правильной раскраски, в этом случае такие цвета будем считать допустимыми (при нарушении условий поставленной задачи – недопустимыми). Для проверки работы метода берётся некая выборка из K

графов $\Lambda = \{G_1, G_2, \ldots, G_K\}$ и оценивается усреднённое качество решения $\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{K} Q(G_i)}{K}$, где $Q(G_i)$ – качество i-го решения и равное $\chi(G_i)$, обычно оно больше оптимума $\bar{Q} > Q^*$.

Анализ качества и времени поиска решения для жадного метода и его модификаций

Эвристические методы [9], к числу которых принадлежат жадные методы, основаны на том, что существует определённое правило (*эвристика*), часто имеющее нестрогий и во многом интуитивный характер, с помощью которого происходит выбор одной из возможностей построения решения на каждом из шагов. В большинстве случаев применение эвристик не гарантирует получения оптимальных решений, при этом от выбора используемой эвристики во многом зависит как качество решения [10], так и затраты времени на его формирование [9], что делает выбор нетривиальной задачей.

Для описываемой группы методов данная эвристика записывается достаточно просто. Предположим, что на текущем i-м шаге имеется некоторое решение X_i, сформированное полностью или частично, причём для него имеется некоторая оценка качества $Q(X_i)$, которую по условию задачи необходимо минимизировать. Также имеется K возможностей его последующей модификации $X_{i+1} = g_k(X_i)$, $k = \overline{1,K}$, где $g_k(.)$ – некоторая процедура модификации. Выбор одной из возможностей приводит к изменению качества решения:

$$\Delta Q_k = \Delta Q(X_i, X_{i+1}) = Q(X_{i+1}) - Q(X_i) = Q(g_k(X_i)) - Q(X_i). \tag{1}$$

При жадной стратегии формирования решения выбирается такая из возможностей, которая обеспечивает минимальное приращение функции оценки качества:

$$k = \arg\min_{i=\overline{1,K}} \Delta Q_k. \tag{2}$$

Таким образом, использование жадной стратегии приводит к принятию локально-оптимального выбора решения на каждом шаге. Обычно при этом не допускаются возвраты назад и изменения в выборе компонентов решения, сделанных на предыдущих шагах. Метод основан на предположении о том, что последовательность локально-оптимальных шагов в конце его работы приведёт к оптимальному решению, однако на практике, используя эти предположения, не всегда получается достичь желаемого качества. В некоторых случаях применение жадной стратегии может дать наихудшее из возможных решение. Например, при нахождении хроматического числа графа начальные шаги могут быть локально-оптимальными, однако в процессе решения ввиду особенностей данного метода хроматическое число на каждом шаге может увеличиваться, и в худшем случае стать равным N.

В ситуациях, когда исходные данные остаются неизменными, жадные методы гарантируют получение одних и тех же решений, т.е. являются последовательными [7], т.к. перебор различных решений не предусматривается. Следствием данной особенности являются их главные достоинства, выражаемые в простоте реализации и высокой скорости работы. А основным недостатком является невысокое качество формируемых решений ввиду отсутствия каких-либо средств как для более глубокого их анализа, так и для учёта опыта предыдущих попыток их построения.

Описание и общий принцип работы жадного метода раскраски графа приведено ниже:

1. Задать номер текущей вершины $i = 1$, сформировать множество ещё не окрашенных вершин $\tilde{A} := A$.
2. Присвоить i-й вершине такой минимально допустимый j-й цвет, для которого приращение качества решения ΔQ_k будет наименьшим.
3. Удалить текущую вершину a_i из множества нераскрашенных $\tilde{A} := \tilde{A} \setminus \{a_i\}$, увеличить индекс текущей вершины $i := i + 1$.
4. Повторить п. 2–3, пока не будут раскрашены все вершины.

В простейшей реализации данного метода вершины перебираются последовательно в том порядке, в каком они указаны в графе, в то время как существует $N!$ способов выбора порядка рассмотрения вершин. В ряде задач было показано, что порядок рассмотрения элементов решения оказывает существенное влияние как на его качество, так и на время его получения [10, 11, 12]. В процессе разработки алгоритма было предложено реализовать ещё три различных способа обхода вершин неориентированного графа:

1. В случайном порядке: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A} \subseteq A$ выбирается случайная вершина a_i, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.

2. В порядке уменьшения степеней вершин: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается такая вершина a_i, у которой больше остальных связей с другими вершинами в матрице смежности (наибольшее возможное значение степени вершины $\rho(a_i) \leq N-1$) $\rho(a_i) \to \max$, ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.

3. В порядке возрастания количества допустимых цветов вершины: из множества ещё не окрашенных вершин $\tilde{A}$ выбирается такая вершина a_i, у которой наименьшая мощность множества допустимых цветов $|X(a_i)| \to \min$, $X(a_i) \subseteq X$, затем ей присваивается минимально допустимый цвет c_j.

При обходе вершин по одному из выбранных и не изменяющихся порядков для одного и того же графа жадный метод обеспечивает получение одного и того же решения. Чтобы повысить максимальное количество различных решений, которые может сформировать данный метод, ко всем реализациям обхода вершин был добавлен ещё один параметр, благодаря которому осуществляется возможность выбора окраски первой выбранной вершины в один из цветов или последовательной ее раскраски во все возможные. Т.е. при переборе вершин по порядку, по максимуму возможностей или по минимуму цветов раскраска будет начинаться всегда с одной и той же вершины (при случайном обходе индекс первой выбранной вершины зависит от начального значения генератора псевдослучайных чисел), и она всегда окрашивается в минимально допустимый цвет, равный 1. При активации данного параметра первая выбранная вершина графа будет поочерёдно окрашена во все из N возможных цветов, при этом максимальное количество разнообразных решений, которые может сформировать метод для заданного графа, увеличится следующим образом: для перебора вершин по порядку с 1 до N; для перебора вершин в случайном порядке с $N!$ до $N \cdot N!$; для перебора вершин по максимуму возможностей с 1 до N; для перебора вершин по минимуму цветов с N до N^2.

При формировании решений свыше заданного значения $C_{\max}$ работа метода прекращается.

Влияние этого параметра на качество решения, а также сравнение всех алгоритмов данного метода между собой с целью выявления лучшего по качеству и времени решения, выполненное в ходе вычислительного эксперимента, показано на рисунках 1 и 2.

Проверка проводилась для $|\Lambda| = 250$ случайных графов выборки графов с псевдослучайной структурой, размером $N = 40$ вершин и плотностью $d(G) = 0.777$.

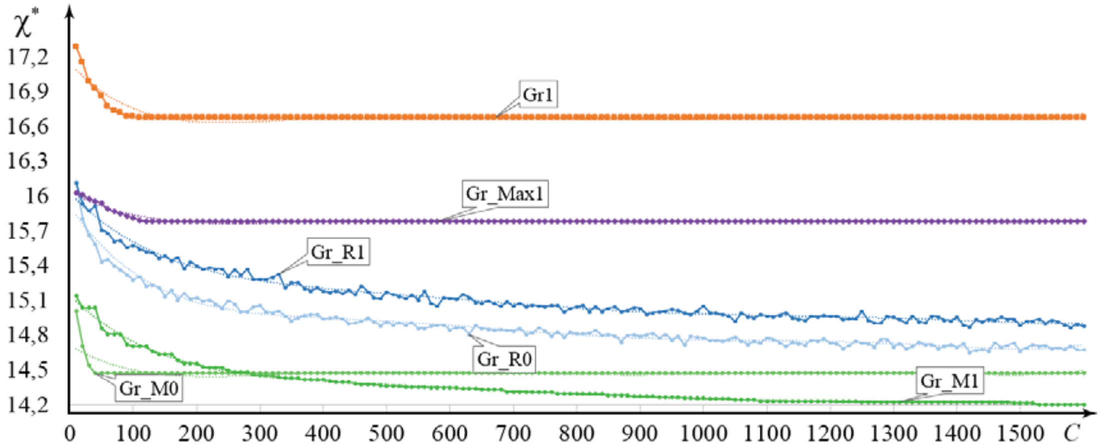

Рис. 1. Зависимость усреднённого хроматического числа от количества формируемых решений для различных вариантов обхода вершин графа

Здесь: Gr1 – перебор выполняется по порядку вершин в графе с последовательным назначением N цветов первой вершине; Gr_R0 – случайный порядок перебора вершин с назначением первого цвета первой вершине; Gr_R1 – случайный порядок перебора вершин с поочерёдным назначением N цветов первой вершине; Gr_Max1 – порядок перебора вершин по максимуму возможностей с последовательным назначением N цветов первой вершине; Gr_Min0 – порядок перебора вершин по минимуму допустимых цветов с назначением первого цвета первой вершине; Gr_Min1 – порядок перебора вершин по минимуму допустимых цветов с поочерёдным назначением N цветов первой вершине.

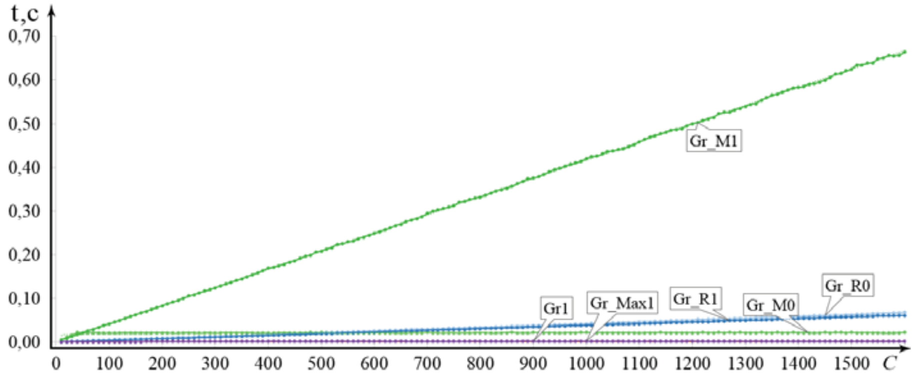

Рис. 2. Зависимость усреднённого времени нахождения от количества формируемых решений для различных вариантов обхода вершин графа

Затраты времени в зависимости от числа итераций отображены на рисунке 2. Для случайного порядка перебора вершин параметр последовательного назначения N цветов даёт ухудшение качества решения приблизительно на 1.3 % на всём интервале проверки, при этом время решения практически не изменяется.

Для случая перебора вершин по минимуму цветов с выключенным параметром скорость сходимости увеличивается, однако, сформировав N решений, алгоритм не может изменить качество решения ввиду его последовательного характера. Активация данного параметра после 280 решений позволяет получить наилучшее по качеству из всех решений метода, наиболее приближающееся к оптимуму.

Для перебора по порядку вершин в графе или по максимуму возможностей с отключённым параметром последовательного назначения N цветов первой вершине не имеет смысла выполнять анализ скорости сходимости ввиду того, что графики для данных алгоритмов будут иметь форму прямой линии, параллельной оси абсцисс, со значением оси ординат, равным первой итерации соответствующих алгоритмов, потому что при любом количестве итераций будет сформировано только одно решение.

Таким образом, в ходе выполненных вычислительных экспериментов установлено, что лучшей реализацией по качеству является перебор по минимуму цветов с последовательным назначением N цветов первой вершине: она даёт выигрыш по усреднённому значению хроматического числа по сравнению с простейшей реализацией жадного алгоритма в среднем в 1.2 раза, однако при активации данного параметра при максимальном значении итераций необходимо приблизительно в 30.7 раза больше временных затрат для формирования решения в худшем случае. Для случайного порядка перебора вершин параметр выбора начального цвета первой выбранной вершины не оказывает существенного влияния на время решения.

Работа была частично поддержана РФФИ, грант № 17-07-00317-а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
2. Закревский А.Д., Поттосин Ю.В. Декомпозиция параллельных алгоритмов логического управления по заданному разбиению множества предложений // А и ВТ. 1985. № 4. С. 65–72.
3. Закревский А.Д., Василенок В.К. Формальное описание алгоритмов логического управления при проектировании дискретных систем // Электронное моделирование. 1984. Т. 6. № 4. С. 79–84.
4. Gregory J. Chaitin, Mark A. Auslander, Ashok K. Chandra, John Cocke, Martin E. Hopkins, and Peter W. Markstein. Register allocation via coloring // Computer Languages. 1981. P. 47-57.
5. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.

6. Duffy K., O'Connell N., Sapozhnikov A. Complexity analysis of a decentralised graph colouring algorithm // Information Processing Letters. 2008. Vol. 107. Iss. 2. P. 60–63.
7. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с.
8. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
9. Пшеничных А.О., Ватутин Э.И. Сравнение качества решений эвристических методов оценки хроматического числа графа // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2017). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2017. С. 287–289.
10. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
11. Ватутин Э.И., Романченко А.С., Титов В.С. Исследование влияния порядка рассмотрения пар на качество расписаний при использовании жадного подхода // Известия Юго-Западного государственного университета. 2013. № 1 (46). С. 58–64.
12. Колпаков Р.М., Посыпкин М.А. О наилучшем выборе переменной ветвления в задаче о сумме подмножеств // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 1. С. 51–58.

Пшеничных Александр Олегович
Студент каф. Вычислительной техники,
Юго-Западный государственный университет
305040, Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94,
Тел.: +7 (4712) 22-26-65
Эл. почта: alex220697@mail.ru

Ватутин Эдуард Игоревич
К.т.н., доцент каф. Вычислительной техники,
Юго-Западный государственный университет
305040, Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Тел.: +7 (4712) 22-26-65
Эл. почта: evatutin@rambler.ru

Гвоздева Светлана Николаевна
Аспирант каф. Вычислительной техники,
Юго-Западный государственный университет
305040, Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94,
Тел.: +7 (4712) 22-26-65
Эл. почта: svetka-gvozdeva@yandex.ru

A.O. PSHENICHNYKH, S.N. GVOZDEVA, E.I. VATUTIN

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF THE ORDER OF CONSIDERATION OF VERTICES DURING GRAPHS COLORING USING GREEDY ALGORITHM

This article presents the implementation of the greedy method in the problem of finding the chromatic number of a graph belonging to the class of complexity. Many practically important tasks can be reduced to problems of graph theory, and some of them can be reduced to the problem of graph coloring. Using greedy methods, you can quickly get solutions to the problem, but their quality may be far from optimum. Therefore, when applying the greedy method in practice, it often becomes necessary to observe a balance between the speed characteristics of the method (the time of making decisions) and the quality of the solutions obtained. To improve the quality of the solutions obtained by this method, a number of changes were proposed. The article presents the results of a computational experiment, the purpose of which was to identify the influence of the color of the first vertex on the quality of the solution, as well as on the time required for its formation. The results of influencing the quality and time of solving four different ways of traversing the vertices of a graph for the greedy method are given, including: in the order in which they are indicated in the graph; in random order; in decreasing order of vertex degrees; in order of increasing the number of acceptable colors.

Keywords: *chromatic number of a graph, heuristic methods, greedy methods, graph coloring, graph theory.*

REFERENCES

1. Zykov A.A. Fundamentals of graph theory. *Moscow. Publisher "Nauka"*. 1987. 384 p. (in Russian).
2. Zakrevsky A.D., Pottosin Yu.V. Decomposition of parallel logic control algorithms by a given partition of the set of sentences. *A and VT*. 1985. No. 4. P. 65–72 (in Russian).
3. Zakrevsky A.D., Vasilenok V.K. Formal description of logical control algorithms for designing discrete systems. *Electronic modeling*. 1984. Vol. 6. No. 4. P. 79–84 (in Russian).
4. Gregory J. Chaitin, Mark A. Auslander, Ashok K. Chandra, John Cocke, Martin E. Hopkins, and Peter W. Markstein. Register allocation via coloring. *Computer Languages*. 1981. P. 47-57.

5. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. *Chapman & Hall/CRC*. 2006. 1016 p.
6. Duffy K., O'Connell N., Sapozhnikov A. Complexity analysis of a decentralised graph colouring algorithm. *Information Processing Letters*. July 2008. Vol. 107. Issue 2. P. 60–63.
7. Vatutin E.I., Titov V.S., Yemel'yanov S.G. Basics of discrete combinatorial optimization. *Argamak-Media*. 2016. 270 p. (in Russian).
8. Karpenko A.P. Modern search engine optimization algorithms. Algorithms inspired by nature. *MGTU them. N.E. Bauman*. 2014. 446 p. (in Russian).
9. Pshenichnykh A.O., Vatutin E.I. Comparison of the quality of solutions of heuristic methods for estimating the chromatic number of a graph. *Optoelectronic devices and devices in pattern recognition systems, image processing and symbolic information (Recognition – 2017)*. *SWSU*. Kursk. 2017. P. 287–289 (in Russian).
10. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzyuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S. On the influence of the order of filling cells on the rate of generation of diagonal Latin squares. *Information and measuring diagnostic and control systems (Diagnostics – 2016)*. *SWSU*. Kursk. 2016. P. 33–39 (in Russian).
11. Vatutin E.I., Romanchenko A.S., Titov V.S. Study of the influence of the order of consideration of pairs on the quality of schedules when using the greedy approach. *News of the South-West State University*. 2013. No. 1 (46). P. 58–64 (in Russian).
12. Kolpakov R.M., Posypkin M.A. On the best choice of the branch variable in the problem of the sum of subsets. *Discrete mathematics*. 2017. Vol. 29. No. 1. P. 51–58 (in Russian).

Alexandr O. Pshenichnykh
Student, Department of Computing Techniques,
Southwest State University
94, 50 let Oktyabrya st., Kursk, Russia, 305040,
Phone: +7 (4712) 22-26-65
E-mail: alex220697@mail.ru

Svetlana N. Gvozdeva
Postgraduate student, Department of Computing Techniques,
Southwest State University
94, 50 let Oktyabrya st., Kursk, Russia, 305040,
Phone: +7 (4712) 22-26-65
E-mail: svetka-gvozdeva@yandex.ru

Eduard I. Vatutin
PhD of Technical Sciences, Docent,
Department of Computing Techniques,
Southwest State University
94, 50 let Oktyabrya st., Kursk, Russia, 305040,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Phone: +7 (4712) 22-26-65
E-mail: evatutin@rambler.ru