

Ватутин Э.И., Манзюк М.О., Заикин О.С., Кочемазов С.Е.,
Большев А.Д., Никитина Н.Н., Цитерров И.И.

**СПИСОК КОМБИНАТОРНЫХ СТРУКТУР ИЗ ДЛК ПОРЯДКА 1–8 НА
МНОЖЕСТВЕ ОТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ**

20.02.2019

Основные определения

ДЛК – диагональный латинский квадрат заданного порядка N .

Ортогональные ДЛК (ОДЛК) – пара ДЛК A и B , в которой все упорядоченные пары элементов (a_{ij}, b_{ij}) различны.

Строковое представление ДЛК – элементы ДЛК, выписанные слева направо сверху вниз:

```
3 2 8 4 6 7 1 0 9 5
8 1 2 7 4 6 3 5 0 9
1 5 0 9 8 2 4 3 7 6
6 8 5 2 0 9 7 1 4 3
9 0 7 1 5 4 2 6 3 8
4 3 9 0 1 8 6 7 5 2
0 6 3 8 7 5 9 2 1 4
5 7 6 3 9 1 8 4 2 0
7 9 4 5 2 3 0 8 6 1
2 4 1 6 3 0 5 9 8 7
```

```
3284671095
8127463509
1509824376
6852097143
9071542638
4390186752
0638759214
5763918420
7945230861
2416305987
```

DLX – Dancing Links X algorithm – алгоритм для решения задачи о точном покрытии (англ. exact cover) [3].

Каноническая форма (КФ) – лексикографически минимальное строковое представление ДЛК в соответствующем классе изоморфизма (изотопизма) [4].

Комбинаторная структура – граф, вершины которого образованы ДЛК, а ребра представляют собой наличие отношения ортогональности между соответствующей парой ДЛК. Множество комбинаторных структур, найденных в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, приведено ниже.

1. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=1$

1.1. Одношка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0 (ДЛК A , КФ 1);

ДЛК 2: 0 (ДЛК B , КФ 2) – ДЛК 1 и 2 совпадают.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0 (ДЛК A , ДЛК B).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

тривиальный случай, квадрат ортогонален сам себе (рефлексивность бинарного отношения ортогональности, справедливая только для размерности $N=1$).

Перечень КФ различных комбинаторных структур для размерности $N=1$:

ONCE (A): 1 – 1, where:

1 CFs – 1

2. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=2$ и $N=3$

Для размерности $N=2$ и $N=3$ ДЛК построить невозможно.

3. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=4$

3.1. Одношка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123230132101032 (ДЛК A , КФ 1);

ДЛК 2: 0123321010322301 (ДЛК B , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123230132101032 (ДЛК A , ДЛК B).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Перечень КФ различных комбинаторных структур для размерности $N=4$:

ONCE (A): 1 – 1, where:

1 CFs – 1

4. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=5$

4.1. ДЛК без ОДЛК (пустышка, англ. bachelor)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123413420421032034134012 (ДЛК A , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = (0).$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123413420421032034134012 (ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 1, a = 0, \rho = [1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

4.2. Одношка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123423401401231234034012 (ДЛК *A*, КФ 1);

ДЛК 2: 0123434012123404012323401 (ДЛК *B*, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123423401401231234034012 (ДЛК *A*, ДЛК *B*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Перечень КФ различных комбинаторных структур для размерности $N=5$:

ONCE (A): 1 – 1, where:

1 CFs – 1

5. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=6$

5.1. ДЛК без ОДЛК (пустышка, англ. bachelor)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 012345120534435021301452543210254103 (ДЛК A , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = (0).$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345120534435021301452543210254103 (ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 1, a = 0, \rho = [1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

для размерности $N=6$ ОДЛК не существуют.

6. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=7$

6.1. ДЛК без ОДЛК (пустышка, англ. bachelor)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456120653454310623654201401562365423102360145 (ДЛК A , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = (0).$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456120653454310623654201401562365423102360145 (ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 1, a = 0, \rho = [1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

6.2. Одношка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456124563064520135364102461032535012642036541 (ДЛК *A*, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456630124535641204652031143650220456135210364 (ДЛК *B*, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456124563064520135364102461032535012642036541 (ДЛК *A*, ДЛК *B*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

6.3. Клика-4

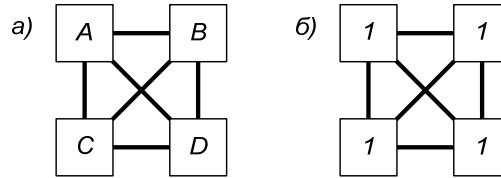


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456231564056401234062315620153415340623456201 (ДЛК A, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456620153434562011534062231564040623155640123 (ДЛК B, КФ 1);

ДЛК 3: 0123456564012315340626201534345620123156404062315 (ДЛК C, КФ 1);

ДЛК 4: 0123456345620140623152315640564012362015341534062 (ДЛК D, КФ 1);

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456231564056401234062315620153415340623456201 (ДЛК A, ДЛК B, ДЛК C, ДЛК D);

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 6, \rho = [4, 4, 4, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

6.4. Перечень КФ различных комбинаторных структур из ОДЛК

ONCE (A): 1 – 4, where:

1 CFs – 4

CLIQUE4 (O): 3 – 1, where:

1 CFs – 1

7. КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ДЛК ПОРЯДКА $N=8$

7.1. ДЛК без ОДЛК (пустышка, англ. bachelor)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712045736673014524675210324567310351206747061324553476021
(ДЛК A , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = (0).$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712045736673014524675210324567310351206747061324553476021
(ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 1, a = 0, \rho = [1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.2. Несимметричная однушка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712047635537160427635120464523170306754212546071347102356
(ДЛК *A*, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456776510243673051242314607540752316540617321267345035427601
(ДЛК *B*, КФ 2).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712047635537160427635120464523170306754212546071347102356
(ДЛК *A*);

КФ 2: 0123456712307456374256106501374273546201561703244065217324761035
(ДЛК *B*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.3. Симметричная однушка



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712357604371024567654321053716042406753216542017324061735

(ДЛК A , КФ 1) – симметрия относительно центра квадрата;

ДЛК 2: 0123456757012436756431201345607264321705365072142076534142170653

(ДЛК B , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712357604371024567654321053716042406753216542017324061735

(ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.4. Линия-3 без симметрии (несимметричная двушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712047635537160427635120464523170376054212546071340172356
(ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 0123456723451706765432106071543257362041421706531402637535607124
(ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 0123456716047235537120467235160464523170376054212546071340176352
(ДЛК С, КФ 3).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712047635537160427635120464523170376054212546071340172356
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712375604406573215401673276543210371204566540217323761045
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712306745567410327456210363415270406273512507341637150624
(ДЛК С).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 3, a = 2, \rho = [1, 1, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.5. Линия-3 с симметрией (симметричная двушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712547630306724517645120354123076230167454576031267305124

(ДЛК А, КФ 1) – центральная симметрия;

ДЛК 2: 0123456724306751631572401576302476512403576403123042517642071635

(ДЛК В, КФ 2) – центральная симметрия;

ДЛК 3: 0123456776510423547610324032671567153240324751062304765115602374

(ДЛК С, КФ 1) – центральная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712547630306724517645120354123076230167454576031267305124

(ДЛК А, ДЛК С);

КФ 2: 0123456712307456506723413674120543125670250167347456301267450123

(ДЛК В).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 3, a = 2, \rho = [1, 1, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.6. Линия-4 без симметрий



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712370456354276015671324073546012671053244065217324061735

(ДЛК *B*, КФ 1) – вертикальная симметрия;

ДЛК 2: 0123456756047321147520367352610437615240203614756540371242170653

(ДЛК *A*, КФ 2) – вертикальная симметрия;

ДЛК 3: 0123456725167034426701537054231616453270530167423470162567325401

(ДЛК *C*, КФ 3) – вертикальная симметрия;

ДЛК 4: 0123456767425301743026151506327430541726261574304267015353716042

(ДЛК *D*, КФ 4) – вертикальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712370456354276015671324073546012671053244065217324061735

(ДЛК *B*);

КФ 2: 0123456712370456247160353605271457643102451076237356124060425371

(ДЛК *A*);

КФ 3: 0123456712370456356071247654321053061742674523014012567324716035

(ДЛК *C*);

КФ 4: 0123456712043756365072144567012324716035574613027312564060352471

(ДЛК *D*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 3, \rho = [1, 1, 2, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.7. Цикл-4 (1 различная КФ)

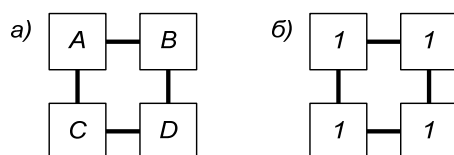


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712547036306724514675120354123670230167457546031267305124

(ДЛК A, КФ 1) – центральная симметрия;

ДЛК 2: 0123456724706153631572407546302136512704576403121032547642071635

(ДЛК B, КФ 1) – центральная симметрия;

ДЛК 3: 0123456767452301263401757501342630765214145276305260174343176052

(ДЛК C, КФ 1) – центральная симметрия;

ДЛК 4: 0123456776310425547610324052671327153640324751066304725115602374

(ДЛК D, КФ 1) – центральная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712547036306724514675120354123670230167457546031267305124

(ДЛК A, ДЛК B, ДЛК C, ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 4, \rho = [2, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

структуру цикл-4 также можно рассматривать как ромб-2.

7.8. Трешка (структура 1:3)

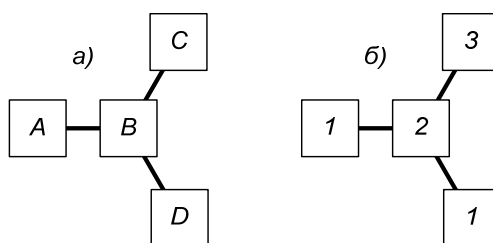


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712306745645701237546301246751230576423013012547623017654

(ДЛК A, КФ 1) – вертикальная симметрия;

ДЛК 2: 0123456774563021103276544675123057642103230167456547031232105476

(ДЛК B, КФ 2) – вертикальная симметрия, столбце-инверсный ДЛК;

ДЛК 3: 0123456746750312721654305764302113027645345012762031675465472103

(ДЛК C, КФ 3) – вертикальная симметрия;

ДЛК 4: 0123456756742130674512032301567432107456456703127456302110326745

(ДЛК D, КФ 1) – вертикальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712306745645701237546301246751230576423013012547623017654

(ДЛК A, ДЛК D);

КФ 2: 0123456712305746576401324675320175461023645723103012647523017654

(ДЛК B);

КФ 3: 0123456712370456604523715371604245607123371256047456123026043715

(ДЛК C).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 3, \rho = [1, 1, 1, 3].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

в отличие от размерности $N=10$, все трешки для размерности $N=8$ включают в своем составе только 3 КФ.

7.9. Симметричная четверка (структура 1:4), 3 КФ

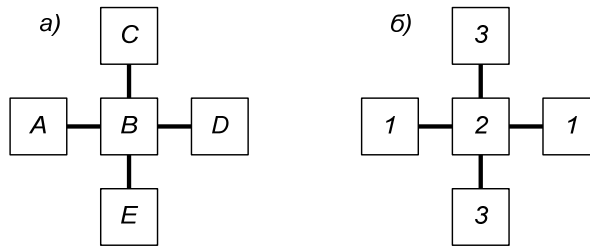


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712370456371526046574302153016742764253104056127324607135
(ДЛК A, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456774561230103254765647031247652103231076453201675465743021
(ДЛК B, КФ 2) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 3: 0123456712307456371526046504372153716042764253104056127324670135
(ДЛК C, КФ 3) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456715307426371526046204375123716045764253104056127354670132
(ДЛК D, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 5: 0123456715370426371526046274305123016745764253104056127354607132
(ДЛК E, КФ 3) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712370456371526046574302153016742764253104056127324607135
(ДЛК A, ДЛК D);
- КФ 2: 0123456712307456367250147456123050143672456701236305274127416305
(ДЛК B);
- КФ 3: 0123456712307456371526046504372153716042764253104056127324670135
(ДЛК C, ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 1, 1, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.10. Симметричная четверка (структура 1:4), 4 КФ

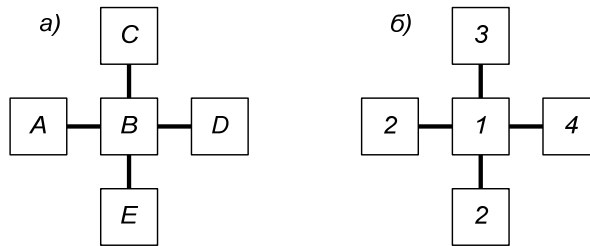


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712305746756401236475321057461032465723013012647523017654
(ДЛК *B*, КФ 1) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456753617024167523403042517642306715751604322407165367543201
(ДЛК *A*, КФ 2);
- ДЛК 3: 0123456753617024127563403046517246302715751204362407165367543201
(ДЛК *C*, КФ 3) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456753617024167023453542017642356710701654322407165367543201
(ДЛК *D*, КФ 4) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 5: 0123456753617024127063453546017246352710701254362407165367543201
(ДЛК *E*, КФ 2).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712305746756401236475321057461032465723013012647523017654
(ДЛК *B*);
- КФ 2: 0123456712370654301524767456123065407123476253015371604226043715
(ДЛК *A*, ДЛК *E*);
- КФ 3: 0123456712370456371256045476103245607123604523717351624026043715
(ДЛК *C*);
- КФ 4: 0123456712370456301526747456123045607123674253015371604226043715
(ДЛК *D*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 1, 1, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.11. Несимметричная четверка (структура 1:4), 5 КФ

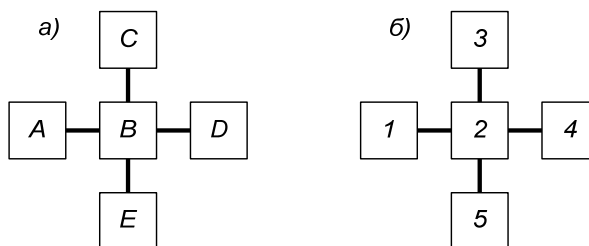


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712057634763412054567012353716042375624102410375660425371
(ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 0123456743726015126734503715260465407321203451767651024354061732
(ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 0123456717052634763412054562017353716042325674102410375660475321
(ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 0123456762517430751602435407632146753102374026152034175613625074
(ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 0123456767512430751602435402637146753102324076152034175613675024
(ДЛК E, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712057634763412054567012353716042375624102410375660425371
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712307456354706126751324053046721761253044065217324761035
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712367405507163427405123646523170374056212564071363172054
(ДЛК С);
- КФ 4: 0123456712057643354710264376510250613274643207517654231027106435
(ДЛК D);
- КФ 5: 0123456712307456645123702574061373026145301657245647103247653201
(ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 1, 1, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.12. Ромб-4 (3 КФ)

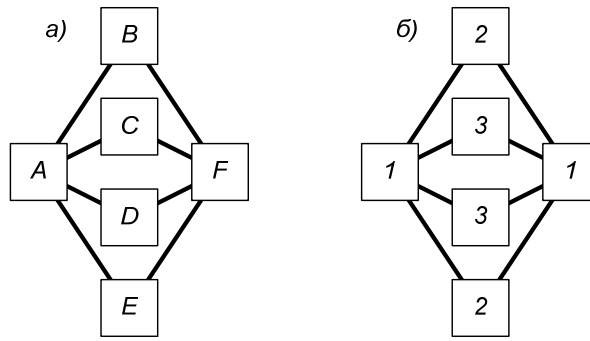


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712307654564720316475130230126745756431202301547647560213
(ДЛК A, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456776452031457602132301674567543120321054761032765454671302
(ДЛК B, КФ 2);

ДЛК 3: 0123456747652031745602132301547656743120321076541032674565471302
(ДЛК C, КФ 3);

ДЛК 4: 0123456776450213457613021032674567543120230154763210765454672031
(ДЛК D, КФ 3);

ДЛК 5: 0123456747650213745613021032547656743120230176543210674565472031
(ДЛК E, КФ 2);

ДЛК 6: 0123456764571302231076545746203132015476103267457564312046750213
(ДЛК F, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712307654564720316475130230126745756431202301547647560213
(ДЛК A, ДЛК F);

КФ 2: 0123456723016745476503216547210332165074765214305074321614307652
(ДЛК B, ДЛК E);

КФ 3: 0123456723016745476503216547210334105672705412365672341012367054
(ДЛК C, ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 8, \rho = [2, 2, 2, 2, 4, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.13. ЕЖ-3 (6 КФ)

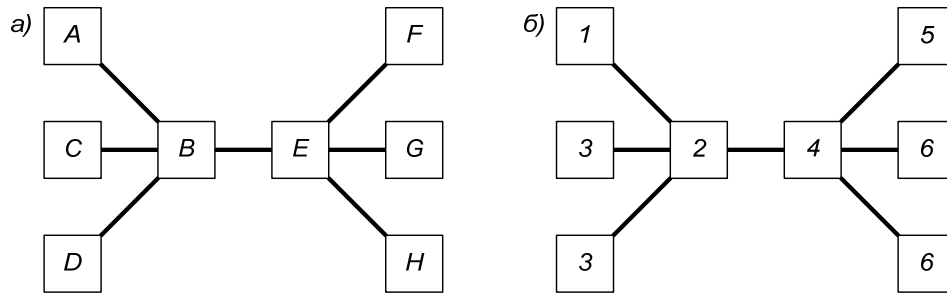


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456723017654156732407452603152741306671504234036517236402715
(ДЛК А, КФ 1) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456776102345624150734365170234567120503762141572043627043651
(ДЛК В, КФ 2) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 3: 0123456725017436146732507632504152741603471603253045617263502714
(ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 0123456713720654756031422457603150142376670514234236571036417205
(ДЛК D, КФ 3);
- ДЛК 5: 0123456715720436746031522637504150142673470613253245671063517204
(ДЛК E, КФ 4) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 6: 0123456723017654671504235274130674526031156732404036517236402715
(ДЛК F, КФ 5) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 7: 0123456776012354621504735364170234567021153762404072513627403615
(ДЛК G, КФ 6);
- ДЛК 8: 0123456723107645674150234275130674526130506732141536047236042751
(ДЛК H, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456723017654156732407452603152741306671504234036517236402715
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712370456247160357365214067543201401256735640731235061724
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712346705257016434716235063015274705234165467013236457021
(ДЛК С, ДЛК D);
- КФ 4: 0123456712043756237610454715260330516274763254105467013265407321
(ДЛК E);

КФ 5: 0123456723017654176502435472630172541036651734204036517236402715
(ДЛК F);
КФ 6: 0123456712305746365712042764301574056132451673205041267363720451
(ДЛК H).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 7, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

для других размерностей ДЛК существуют другие типы ежей (например, еж-6 для $N=9$).

7.14. ЕЖ-3 (8 КФ)

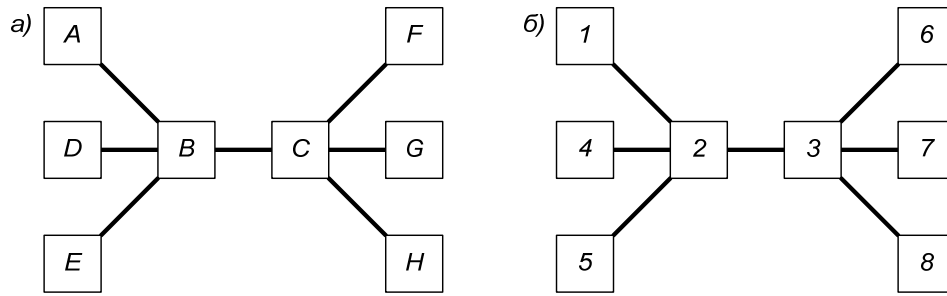


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456753607142465702132714360532716054140257367536142060452371
(ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456712043756237160453056127474625130673524015647031245107623
(ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 3: 0123456763507241451706232764310536752014540167327236145010425376
(ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456764507231751436202367014536052714504163724276105317325406
(ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 5: 0123456754607132765432102317064532016754104253764576102367352401
(ДЛК E, КФ 5) – горизонтальная симметрия, строчно-инверсный квадрат;
- ДЛК 6: 0123456732016754267430154056127374125630174523065367014265307421
(ДЛК F, КФ 6) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 7: 0123456712743056735162403506172454607132603254712647031547152603
(ДЛК G, КФ 7) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 8: 0123456732716054765432104506172354107632104253762367014567352401
(ДЛК H, КФ 8) – горизонтальная симметрия, строчно-инверсный квадрат.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712043756371526044657021354716032654073217362514020361475
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712043756237160453056127474625130673524015647031245107623
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712043756375162045376104245107623263704157462513060452371
(ДЛК С);
- КФ 4: 0123456712307456475612037514362053016742264703153062517464752031
(ДЛК D);

КФ 5: 0123456712307456471526037654321053016742654703213062517424761035
(ДЛК *E*);

КФ 6: 0123456712043756357160247356124047125603263704155460713260452371
(ДЛК *F*);

КФ 7: 0123456712043756357610244065217373516240563074122417063567425301
(ДЛК *G*);

КФ 8: 0123456712307456371256047654321054716032654703214065217323061745
(ДЛК *H*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 7, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 4, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.15. Одуванчик

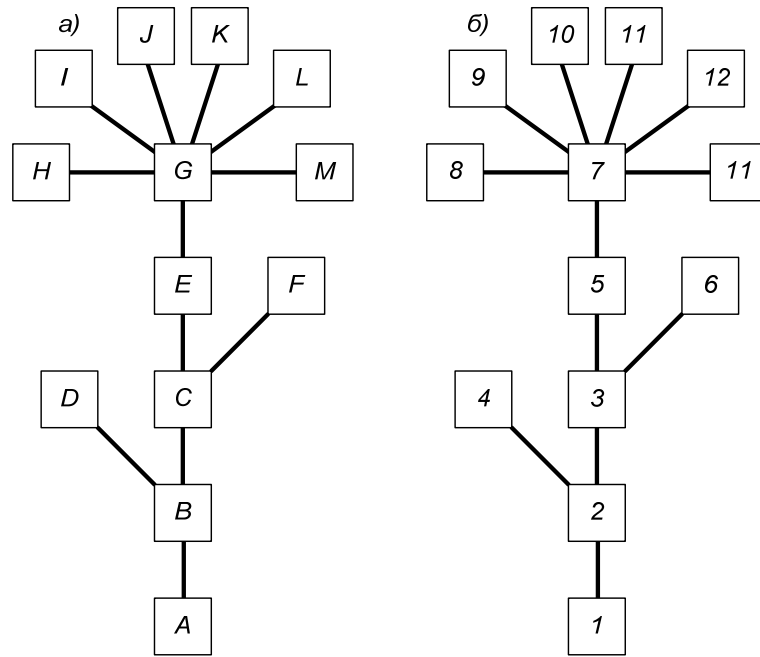


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456723016745145702367246135067352401456071235014367236725014
(ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456776543210654073213062517454761032230167451237045647152603
(ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 3: 0123456767452301421706535306174276325410105432762471603535607124
(ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456723016745427610531754320660325471351076247645231054670132
(ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 5: 0123456764752031536701427231645046507213104253763506172427143605
(ДЛК E, КФ 5) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 6: 0123456745670123763254103276105417452306240167355310764260543271
(ДЛК F, КФ 6) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 7: 0123456732107654105432762367014554716032673524017642531045061723
(ДЛК G, КФ 7) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 8: 0123456764752031531706427236145046507213104253763501672427643105
(ДЛК H, КФ 8) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 9: 0123456764752031231706457536142046507213104253763201675457643102
(ДЛК I, КФ 9) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 10: 0123456764752031236701457531642046507213104253763206175457143602
(ДЛК J, КФ 10) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 11: 0123456724756031536701427631245042507613104253763506172467143205
(ДЛК K, КФ 11);
- ДЛК 12: 0123456724716035536701427635241042107653104253763506172467543201
(ДЛК L, КФ 12) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 13: 0123456764712035536701427235641046107253104253763506172427543601
(ДЛК M, КФ 11).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456723016745145702367246135067352401456071235014367236725014
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712306745645723104576102376453201576401323012547623017654
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456723016745174253066475203135607124421706537654321050361472
(ДЛК С);
- КФ 4: 0123456723016745357610246054327117325406421076537645231054670132
(ДЛК D);
- КФ 5: 0123456712043756273164056475203153607142451706237642531030561274
(ДЛК E);
- КФ 6: 0123456712307456306251744517062374561230674523015301674226743015
(ДЛК F);
- КФ 7: 0123456723016745327610541054327667425301451706237635241054607132
(ДЛК G);
- КФ 8: 0123456712307456476251037514362030561274630527415471603226470315
(ДЛК H);
- КФ 9: 0123456712346750537021464761320574165023354206716057143226057314
(ДЛК I);
- КФ 10: 0123456712057436267031547514062357326041405613723467521063412705
(ДЛК J);
- КФ 11: 0123456712346705371504267056214345017632246053716347125056723014
(ДЛК K, ДЛК M);
- КФ 12: 0123456712370456476521037451623035107624604253715376104226043715
(ДЛК L).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 13, a = 12, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 7].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.16. Кактус

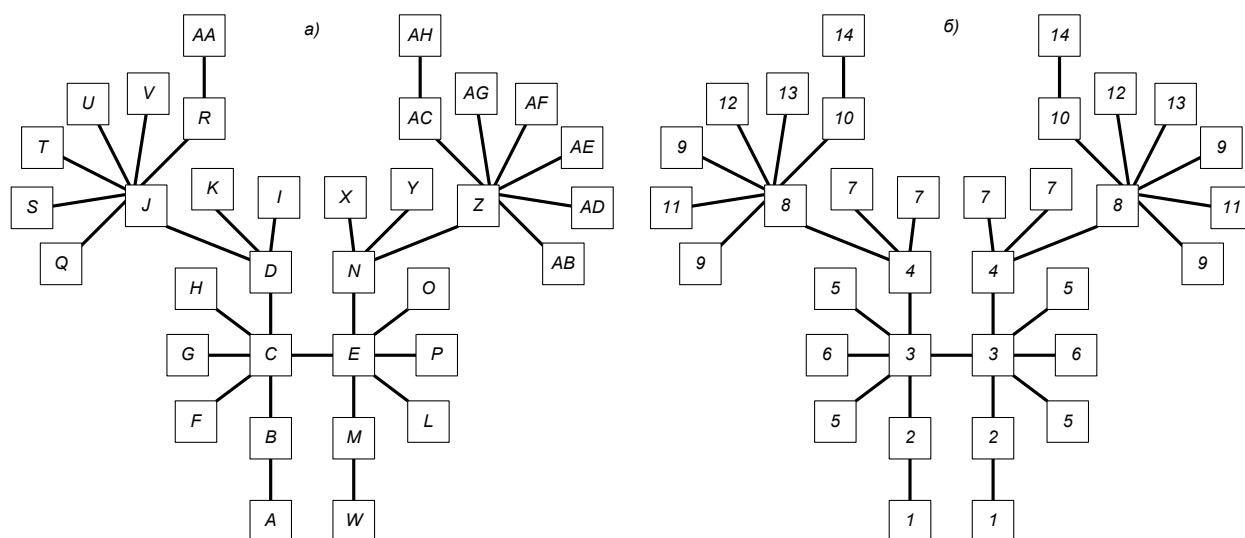


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712307456406521732714360576425310350617245471603263570241
(ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 2: 0123456774561230371256046237045153016742104523764560712326743015
(ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 3: 0123456712407356735162405604371224761035351706246032547147652103
(ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 4: 0123456765370421371526047462513046507213204613755301674212743056
(ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 5: 0123456765370421376251047451623042107653104523762306174556743012
(ДЛК E, КФ 3) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 6: 0123456764570231376251047231645053107642104523764506172326743015
(ДЛК F, КФ 5) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 7: 0123456757143602153704267356124060452371246071354201675336725014
(ДЛК G, КФ 6) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 8: 0123456775361420371256046457023142016753104523762360714556743012
(ДЛК H, КФ 5) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 9: 0123456712043756735162405637041227461305451076236472503130652174
(ДЛК I, КФ 7) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 10: 0123456756043712735162406537042117452306426071532476103530125674
(ДЛК J, КФ 8) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 11: 0123456756407312735162406504372114752036326701542036147547125603
(ДЛК K, КФ 7) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 12: 0123456712043756735162405647031220361475451076236472503137652104
(ДЛК L, КФ 5) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 13: 0123456726043715735612406547032110352476426071535471603237125604
(ДЛК M, КФ 2) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 14: 0123456712407356753164204605271353761042241706356054327137625104
(ДЛК N, КФ 4) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 15: 0123456726407315735612406504372114752036326701545031647247125603
(ДЛК O, КФ 5) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 16: 0123456773652140405162732674301557361402640257313510762412470356
(ДЛК P, КФ 6) – горизонтальная симметрия;

- ДЛК 17: 0123456762370451371256047465123046507123104623755301674225743016
(ДЛК *Q*, КФ 9);
- ДЛК 18: 0123456762370451371256047456123045607123104523765301674226743015
(ДЛК *R*, КФ 10) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 19: 0123456762370451371256047465213046507213204613755301674215743026
(ДЛК *S*, КФ 11) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 20: 0123456762370451371256047456213045607213204513765301674216743025
(ДЛК *T*, КФ 9);
- ДЛК 21: 0123456712370456376251047415263046507213204613755301674265743021
(ДЛК *U*, КФ 12) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 22: 0123456715370426376521047412563046507213204613755301674262743051
(ДЛК *V*, КФ 13) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 23: 0123456715407326627430517412563053016742273614053657021440652173
(ДЛК *W*, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 24: 0123456775361420301256741457023642016753674523012360714556743012
(ДЛК *X*, КФ 7) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 25: 0123456763570241476521037541632024107635103254763206175456743012
(ДЛК *Y*, КФ 7) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 26: 0123456773561240401526731547032624016735673254013260715456743012
(ДЛК *Z*, КФ 8) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 27: 0123456726407315123704564765210353761042640257317514362030516274
(ДЛК *AA*, КФ 14);
- ДЛК 28: 0123456712307456754162302605371453761042341706256054237147625103
(ДЛК *AB*, КФ 9);
- ДЛК 29: 0123456712307456745162302604371553761042351706246045237147625103
(ДЛК *AC*, КФ 10) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 30: 0123456712307456754163203605271453761042241706356054327147625103
(ДЛК *AD*, КФ 11) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 31: 0123456712307456745163203604271553761042251706346045327147625103
(ДЛК *AE*, КФ 9);
- ДЛК 32: 0123456715407326723164504602571353761042241706356054327137652104
(ДЛК *AF*, КФ 13) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 33: 0123456715307426724163503602571453761042241706356054327147652103
(ДЛК *AG*, КФ 12) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 34: 0123456775461320367520144712560360543271246071355301674212370456
(ДЛК *AH*, КФ 14) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

```

01000000000000000000000000000000
10100000000000000000000000000000
01011111000000000000000000000000
00100000111000000000000000000000
00100000001111100000000000000000
00100000000000000000000000000000
00100000000000000000000000000000
00100000000000000000000000000000
00010000000000000000000000000000
00010000000000001111100000000000
00010000000000000000000000000000
00001000000000000000000000000000
00001000000000000000010000000000
0000100000000000000000011100000000

```


Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 34, a = 33, \rho = \left[\underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}_{24}, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 7, 7 \right].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.17. Олень

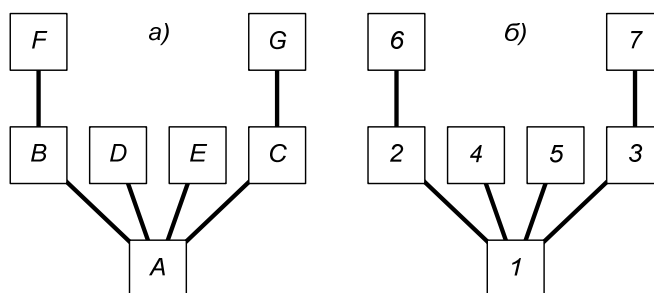


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712307654456723015674103274563210674501233012547623016745
(ДЛК А, КФ 1) – вертикальная симметрия, столбце-инверсный квадрат;
- ДЛК 2: 0123456764570213203176454765230156741032130267547546312032105476
(ДЛК В, КФ 2) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 3: 0123456765740213203164757456230147651032130257465647312032107654
(ДЛК С, КФ 3) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456764571023231076454765321056742301320167547546013210325476
(ДЛК D, КФ 4) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 5: 0123456765741023231064757456321047652301320157465647013210327654
(ДЛК E, КФ 5) – вертикальная симметрия;
- ДЛК 6: 0123456746753120754603122301567432107456576412036457203110326745
(ДЛК F, КФ 6) – вертикальная симметрия, столбце-инверсный квадрат;
- ДЛК 7: 0123456774652031475631021032675432107645564713206574021323015476
(ДЛК G, КФ 7) – вертикальная симметрия, столбце-инверсный квадрат.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712307654456723015674103274563210674501233012547623016745
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712305746465703125476102367453201756421303012647523017654
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712305746465721305476320167451023756403123012647523017654
(ДЛК С);
- КФ 4: 0123456712305746456723106475120357463021765401323012647523017654
(ДЛК D);
- КФ 5: 0123456712305746456701326475302157461203765423103012647523017654
(ДЛК E);
- КФ 6: 0123456712306745546723104675102375463201675401323012547623017654
(ДЛК F);

КФ 7: 0123456712306745546721304675302175461203675403123012547623017654
(ДЛК G).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 7, a = 6, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 2, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.18. Пирамида-1-4-3

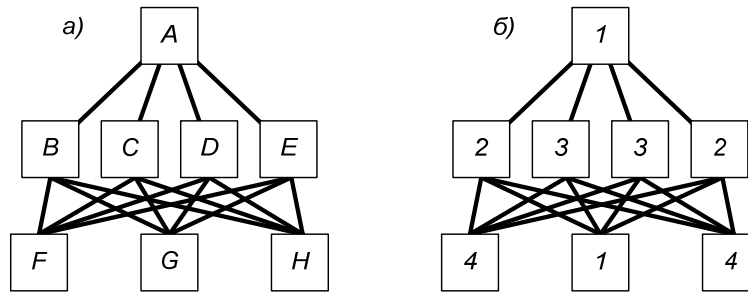


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712307456547610324765210323016745604253717654321035170624
(ДЛК A, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456724061735765432105371604217352406351706246042537142607153
(ДЛК B, КФ 2) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 3: 0123456723016745765432105476103247652103153704263012567462407351
(ДЛК C, КФ 3) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 4: 0123456754761032765432102301674512307456371526046547032140625173
(ДЛК D, КФ 3) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 5: 0123456753716042765432102406173542607153173524063517062460425371
(ДЛК E, КФ 2) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 6: 0123456762407351547610323715260426043715406251737351624015370426
(ДЛК F, КФ 4) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 7: 0123456765470321547610323012567476543210426071532301674517352406
(ДЛК G, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 8: 0123456715370426547610324062517373516240624073512604371537152604
(ДЛК G, КФ 4) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712307456547610324765210323016745604253717654321035170624
(ДЛК A, ДЛК G);
- КФ 2: 0123456712307654654721035476301276541230476503213012547623016745
(ДЛК B, ДЛК E);
- КФ 3: 0123456712307456765432106547032123016745406251735476103237152604
(ДЛК C, ДЛК D);
- КФ 4: 0123456712307456456701237654321030125674230167455476103267452301
(ДЛК F, ДЛК H).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 16, \rho = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.19. Дерево-2

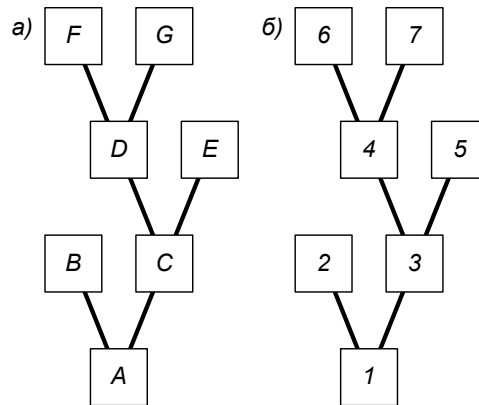


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456712307456356701245604371274561230674523014012567323716045
(ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 0123456726743015603254713715260412407356456701237351624054061732
(ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 3: 0123456756470312203614757451623047652103130257466274305135107624
(ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 4: 0123456757361402456701232041637563025741765432101475203632107654
(ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 5: 0123456774516230357610244602571350643172231076451247035667352401
(ДЛК E, КФ 5) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 6: 0123456713507246674253017236145036752014456701235014367224016735
(ДЛК F, КФ 6) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 7: 0123456736570214624073511475203657361402230167457514362040625173
(ДЛК G, КФ 7) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456712307456356701245604371274561230674523014012567323716045
(ДЛК А);
- КФ 2: 0123456712307456456701235674301273561240674253013015267424016735
(ДЛК В);
- КФ 3: 0123456712043756365702144576102323607145573164027412563060452371
(ДЛК С);
- КФ 4: 0123456712370456371256047654321054016732654073214065217323761045
(ДЛК D);

КФ 5: 0123456712643750305762144576102354107632264103757305214667325401
(ДЛК E);
КФ 6: 0123456712043756356701244751620356307412604253717315264024761035
(ДЛК F);
КФ 7: 0123456723016745571436027536142064725031465072131045237632670154
(ДЛК G).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 7, a = 6, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 3, 3].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

для других размерностей существуют другие виды деревьев, инвариант из числа вершин, числа ребер и отсортированного вектора степеней вершин совпадает с инвариантом для структуры «Дерево-1» из ДЛК порядка 10, хотя графы не изоморфны.

7.19. Дерево-3

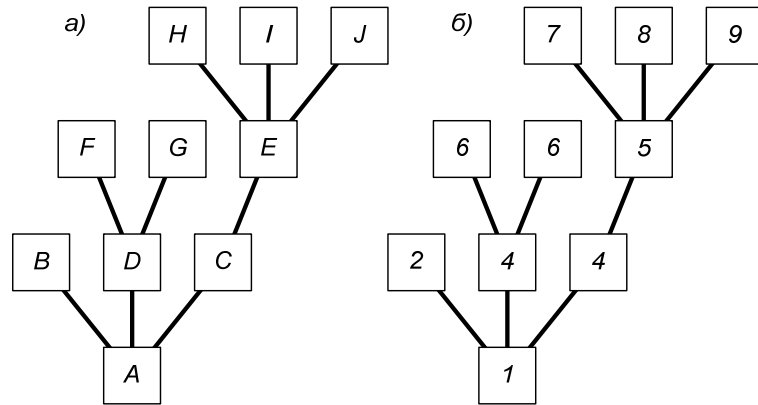


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456712305746456721036745301254761230765403213012647523017654

(ДЛК А, КФ 1) – вертикальная симметрия;

ДЛК 2: 0123456754672310205476317631024567023154134567024576102332105476

(ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 3: 0123456754672310673102542076543113547602450231767645102332106745

(ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 4: 0123456745762310763102542054673113457602670231455467102332105476

(ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 5: 0123456745761023234576017601325467102345325467105467013210325476

(ДЛК E, КФ 5) – вертикальная симметрия, столбце-инверсный квадрат;

ДЛК 6: 0123456713475206356471206415307250762413265017347201634547320651

(ДЛК F, КФ 6) – вертикальная симметрия;

ДЛК 7: 0123456714357206206451734207361567521430754603213610275453716042

(ДЛК G, КФ 6) – вертикальная симметрия;

ДЛК 8: 0123456754670132673210543276540110547623451032767645231023016745

(ДЛК H, КФ 7) – вертикальная симметрия;

ДЛК 9: 0123456776450132643210753257640110645723571032464576231023017654

(ДЛК I, КФ 8) – вертикальная симметрия;

ДЛК 10: 0123456776452310643102752057643113645702570231464576102332107654

(ДЛК J, КФ 9) – вертикальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456712305746456721036745301254761230765403213012647523017654
(ДЛК *A*);

КФ 2: 0123456712307456475162032647031553061742751436206472503130652174
(ДЛК *B*);

КФ 3: 0123456723061745326701547514362017325406465072135041637264752031
(ДЛК *C*);

КФ 4: 0123456723016745154073265736140274625130365702144015267362743051
(ДЛК *D*);

КФ 5: 0123456712307456765432106547032123761045401526735401673237625104
(ДЛК *E*);

КФ 6: 0123456712043756273614055467013260425371731526404650721335716024
(ДЛК *F*, ДЛК *G*);

КФ 7: 0123456712057634736410255071234624365701371064526542317046570213
(ДЛК *H*);

КФ 8: 0123456712307456471256033567012474516230604523715306174226743015
(ДЛК *I*);

КФ 9: 0123456712043756357610245731640260425371741526302360714546570213
(ДЛК *J*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 10, a = 9, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.20. Крест

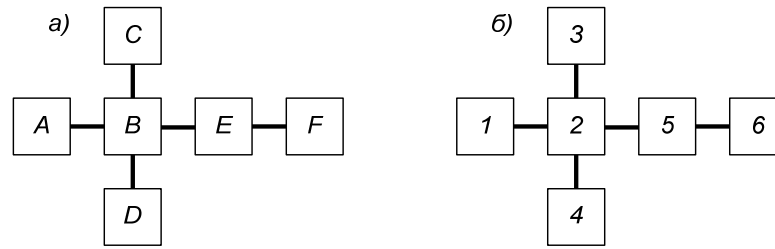


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456723061745154073266735240174516230326701544012567356743012
(ДЛК А, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456754716032371526042306174515307426765432106247035140625173
(ДЛК В, КФ 2);

ДЛК 3: 0123456763025741154073265731640274652130321706544056127326743015
(ДЛК С, КФ 3);

ДЛК 4: 0123456767425301153704265471603240652173321076547356124026043715
(ДЛК Е, КФ 4);

ДЛК 5: 0123456727461305153704266475203140516273326071547312564056043712
(ДЛК D, КФ 5);

ДЛК 6: 0123456746052713735162406742530115307426206431755417063232761054
(ДЛК F, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456723061745154073266735240174516230326701544012567356743012
(ДЛК А);

КФ 2: 0123456712370456765432102476103565407321376251045301674240152673
(ДЛК В);

КФ 3: 0123456723061745475162036574302112407356301256747635241054670132
(ДЛК С);

КФ 4: 0123456712357604706413255701243623465071341067526572314046570213
(ДЛК Е);

КФ 5: 0123456712346705341652706705341223417056705216345670234145670123
(ДЛК D);

КФ 6: 0123456723061745471526037564312036725014645072315031647212470356
(ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 5, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 4].$$

Способ нахождения:
полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

7.21. Большая структура на базе ДЛК с 824 ОДЛК (N824HUGE)

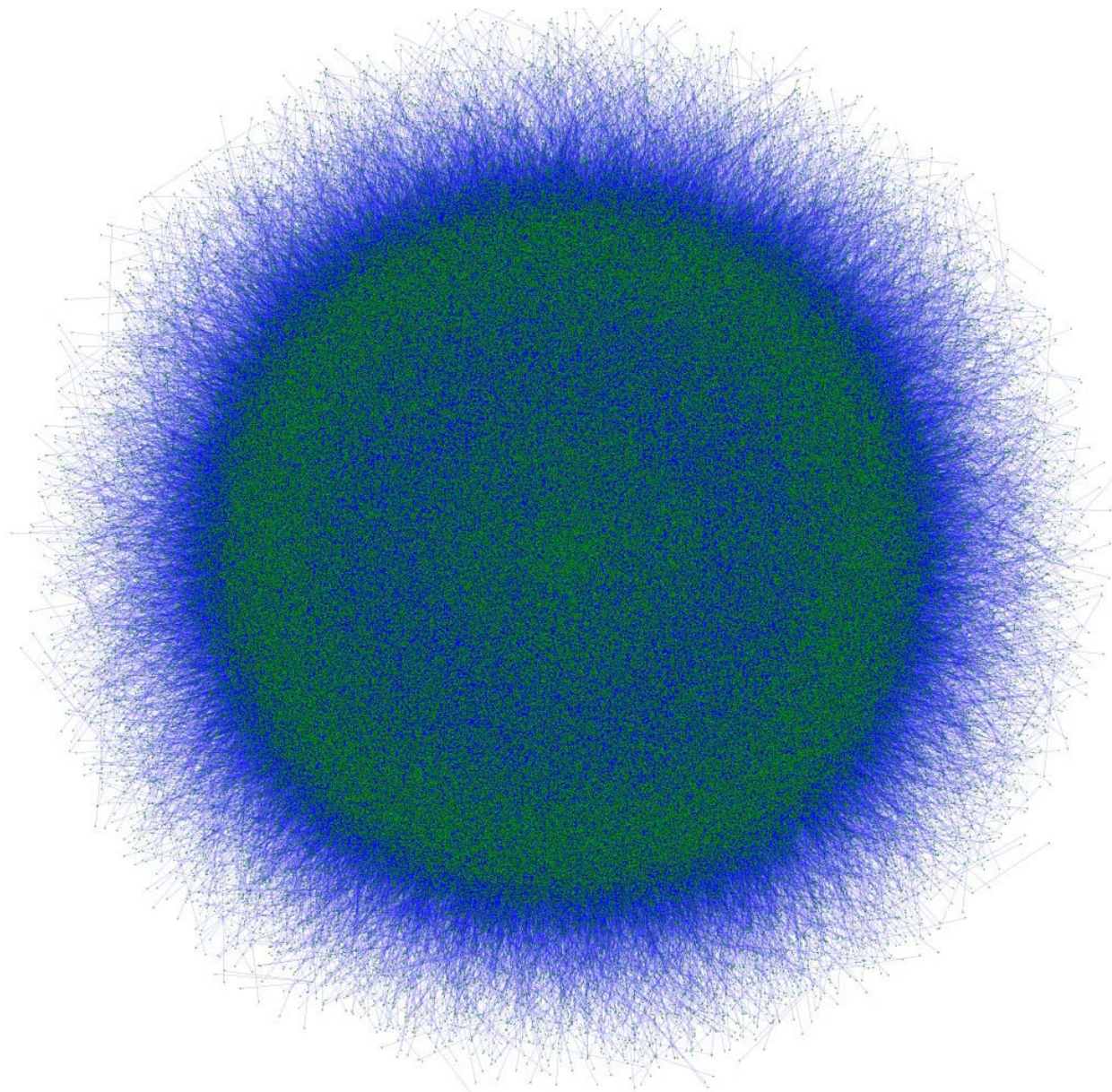


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры (348 000 ДЛК):

ДЛК 1: 0123456723061745154073266735240174516230326701544012567356743012;

ДЛК 2: 0123456754716032371526042306174515307426765432106247035140625173;

...

ДЛК 348 000: 01234567460527137351624067425301153074262064317554170632327
61054.

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры (657 штук):

КФ 1: 0123456723016745456701236745230132107654103254767654321054761032;

КФ 2: 0123456723016745456710326745321054762301765401233210547610327654;

...

КФ 657: 0123456712057436437260513016572454613270654721037650134227340615.

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$v = 348\,000$, $a = 482\,688$,

$$\rho = \left[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{270\ 528}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{24\ 480}, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{5\ 952}, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{28\ 800}, \underbrace{5, 5, \dots, 5}_{1152}, \underbrace{6, 6, \dots, 6}_{1344}, \underbrace{7, 7, \dots, 7}_{3\ 456}, \underbrace{8, 8, \dots, 8}_{576}, \right. \\ \left. \underbrace{9, 9, \dots, 9}_{384}, \underbrace{10, 10, \dots, 10}_{288}, \underbrace{11, 11, \dots, 11}_{384}, \underbrace{12, 12, \dots, 12}_{768}, \underbrace{13, 13, \dots, 13}_{384}, \underbrace{14, 14, \dots, 14}_{864}, \right. \\ \left. \underbrace{16, 16, \dots, 16}_{1056}, \underbrace{18, 18, \dots, 18}_{576}, \underbrace{19, 19, \dots, 19}_{576}, \underbrace{20, 20, \dots, 20}_{1440}, \underbrace{22, 22, \dots, 22}_{576}, \underbrace{24, 24, \dots, 24}_{384}, \right. \\ \left. \underbrace{28, 28, \dots, 28}_{1344}, \underbrace{40, 40, \dots, 40}_{96}, \underbrace{45, 45, \dots, 45}_{576}, \underbrace{48, 48, \dots, 48}_{96}, \underbrace{50, 50, \dots, 50}_{288}, \underbrace{108, 108, \dots, 108}_{768}, \right. \\ \left. \underbrace{116, 116, \dots, 116}_{288}, \underbrace{128, 128, \dots, 128}_{96}, \underbrace{131, 131, \dots, 131}_{384}, \underbrace{824, 824, \dots, 824}_{96} \right].$$

Способ нахождения:

полный перебор + метод Эйлера-Паркера + DLX.

Примечание:

Структура содержит единственную клику мощностью более 2 среди всех остальных структур из ДЛК размерности 8. Клика образована 6 ВОДЛК [1]:

ДЛК 1: 0123456723016745456701236745230132107654103254767654321054761032
(КФ 1);

ДЛК 2: 0123456732107654674523015476103276543210456701231032547623016745
(КФ 1);

ДЛК 3: 0123456745670123321076547654321067452301230167455476103210325476
(КФ 1);

ДЛК 4: 0123456754761032103254764567012323016745765432103210765467452301
(КФ 1);

ДЛК 5: 0123456767452301765432101032547654761032321076542301674545670123
(КФ 1);

ДЛК 6: 0123456776543210547610322301674510325476674523014567012332107654
(КФ 1).

Все ВОДЛК в составе клики мощностью 6 имеют одну и ту же КФ:

КФ 1: 0123456723016745456701236745230132107654103254767654321054761032.

7.22. Перечень КФ различных комбинаторных структур из ДЛК порядка 8

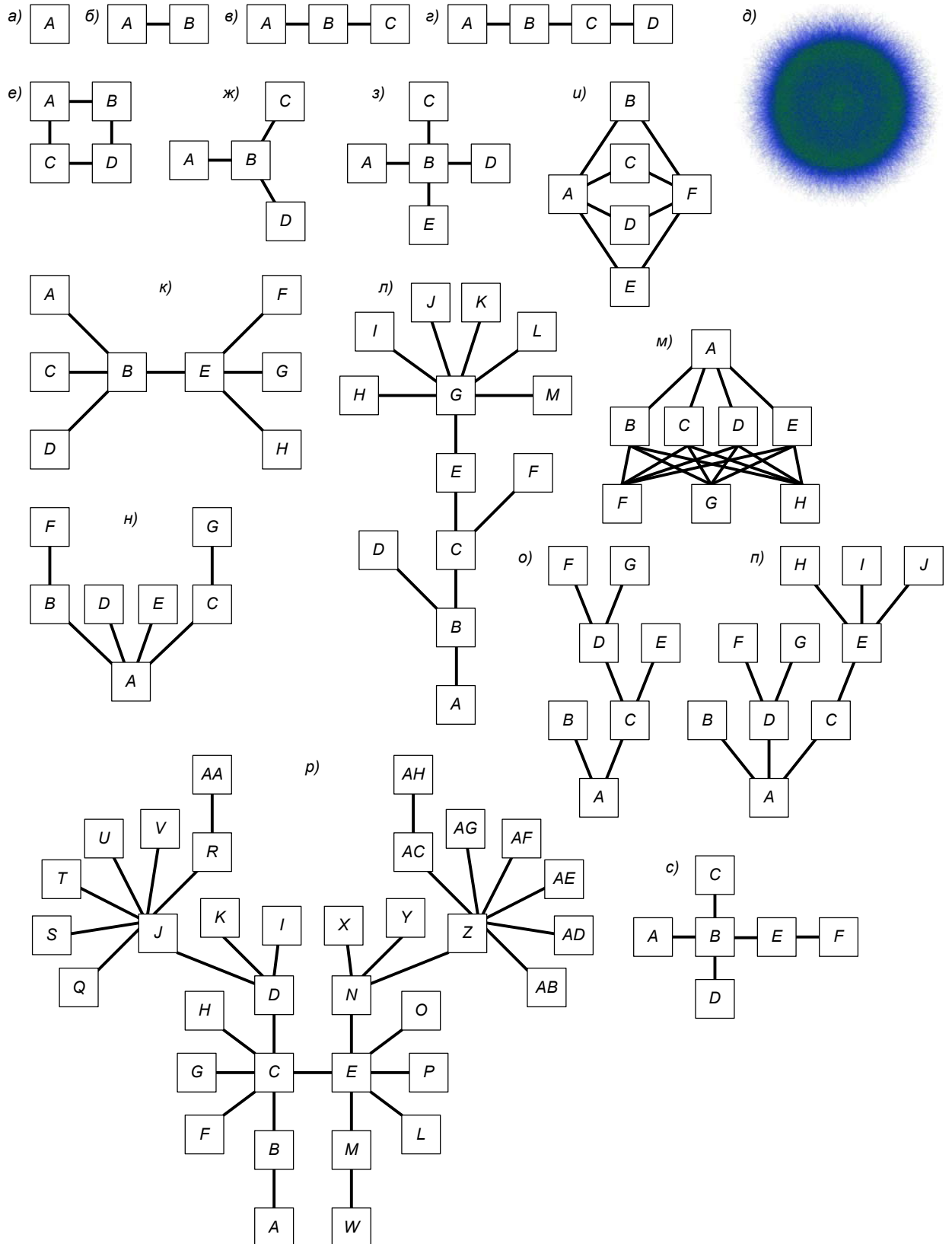


Рис. Перечень комбинаторных структур из ДЛК порядка 8 на множестве отношения ортогональности

ONCE (A):1 – 267, where:

1 CFs – 1
2 CFs – 266

LINE3 (B):1 – 28, where:
2 CFs – 4
3 CFs – 24

LINE3 (B):2 – 16, 17:1, where:
2 CFs – 4
3 CFs – 12

LINE4 (C):1 – 4, where:
4 CFs – 4

LINE4 (C):2 – 4, where:
4 CFs – 4

LOOP4 (E):2 – 1, where:
1 CFs – 1

1TO3 (F):1 – 4, where:
3 CFs – 4

1TO3 (F):3 – 2, where:
3 CFs – 2

1TO4 (G):1 – 25, where:
3 CFs – 10
4 CFs – 3
5 CFs – 12

1TO4 (G):4 – 9, where:
3 CFs – 5
4 CFs – 1
5 CFs – 3

RHOMBUS4 (K):2 – 2, where:
3 CFs – 2

RHOMBUS4 (K):4 – 1, where:
3 CFs – 1

HEDGEHOG3 (Q):1 – 10, where:
6 CFs – 4
8 CFs – 6

HEDGEHOG3 (Q):4 – 4, where:
6 CFs – 2
8 CFs – 2

DANDELION (R):1 – 8, where:
12 CFs – 8

DANDELION (R):2 – 1, where:
12 CFs – 1

DANDELION (R):3 – 2, where:
12 CFs – 2

DANDELION (R):7 – 1, where:
12 CFs – 1

CACTUS (S):1 – 9, where:
14 CFs – 9

CACTUS (S):2 – 2, where:
14 CFs – 2

CACTUS (S):4 – 1, where:
14 CFs – 1

CACTUS (S):6 – 1, where:
14 CFs – 1

CACTUS (S):7 – 1, where:
14 CFs – 1

DEER (T):1 – 4, where:
7 CFs – 4

DEER (T):2 – 2, where:
7 CFs – 2

DEER (T):4 – 1, where:
7 CFs – 1

N8PYRAMID143 (U):4 – 16, where:
2 CFs – 4
4 CFs – 12

TREE2 (V):1 – 4, where:
7 CFs – 4

TREE2 (V):2 – 1, where:
7 CFs – 1

TREE2 (V):3 – 2, where:
7 CFs – 2

TREE3 (W):1 – 5, where:
9 CFs – 5

TREE3 (W):2 – 1, where:
9 CFs – 1

TREE3 (W):3 – 2, where:
9 CFs – 2

TREE3 (W):4 – 1, where:
9 CFs – 1

CROSS (X):1 – 4, where:
6 CFs – 4

CROSS (X):2 – 1, where:
6 CFs – 1

CROSS (X):4 – 1, where:
6 CFs – 1

N824HUGE:1 – 414

N824HUGE:2 – 63

N824HUGE:3 – 16

N824HUGE:4 – 77

N824HUGE:5 – 6

N824HUGE:6 – 4

N824HUGE:7 – 9

N824HUGE:8 – 2

N824HUGE:9 – 2

N824HUGE:10 – 2

N824HUGE:11 – 2

N824HUGE:12 – 4

N824HUGE:13 – 1

N824HUGE:14 – 5

N824HUGE:16 – 9

N824HUGE:18 – 3

N824HUGE:19 – 3

N824HUGE:20 – 5

N824HUGE:22 – 3

N824HUGE:24 – 2

N824HUGE:28 – 10

N824HUGE:40 – 1

N824HUGE:45 – 3

N824HUGE:48 – 1

N824HUGE:50 – 2

N824HUGE:108 – 3

N824HUGE:116 – 2

N824HUGE:128 – 1

N824HUGE:131 – 1

N824HUGE:824 – 1

Библиографический список

1. Манзюк М.О., Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С. Интересные свойства ортогональных диагональных латинских квадратов 7 и 8 порядка // Оптико-электронные приборы и устройства в системах распознавания образов, обработки изображений и символьной информации (Распознавание – 2017). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2017. С. 235–237. http://evatutin.narod.ru/evatutin_co_ls_dls_7_8_ort_structs.pdf
2. Ватутин Э.И., Манзюк М.О., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Бельшев А.Д., Никитина Н.Н., Цитерров И.И. Список комбинаторных структур из ДЛК порядка 10 на множестве отношения ортогональности // http://evatutin.narod.ru/evatutin_ls_all_structs_rus.pdf, 2018.
3. Knuth D.E. Dancing links // arXiv:cs/0011047, 2000. <https://arxiv.org/abs/cs/0011047>
4. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Communications in Computer and Information Science. Vol. 965. Springer, 2018. pp. 578–586. DOI: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.