

Ватулин Э.И., Манзюк М.О., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Бельшев А.Д., Никитина Н.Н.,
Цитерров И.И.

**СПИСОК КОМБИНАТОРНЫХ СТРУКТУР ИЗ ДЛК ПОРЯДКА 10 НА
МНОЖЕСТВЕ ОТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ**

07.11.2018 – 07.08.2019

Основные определения

ДЛК – диагональный латинский квадрат (в данном контексте – порядка 10).

Ортогональные ДЛК (ОДЛК) – пара ДЛК A и B , в которой все упорядоченные пары элементов (a_{ij}, b_{ij}) различны.

Строковое представление ДЛК – элементы ДЛК, выписанные слева направо сверху вниз:

```
3 2 8 4 6 7 1 0 9 5
8 1 2 7 4 6 3 5 0 9
1 5 0 9 8 2 4 3 7 6
6 8 5 2 0 9 7 1 4 3
9 0 7 1 5 4 2 6 3 8
4 3 9 0 1 8 6 7 5 2
0 6 3 8 7 5 9 2 1 4
5 7 6 3 9 1 8 4 2 0
7 9 4 5 2 3 0 8 6 1
2 4 1 6 3 0 5 9 8 7
```

```
328467109581274635091509824376685209714390715426384390186752063875921457
6391842079452308612416305987
```

DLX – Dancing Links X algorithm – алгоритм для решения задачи о точном покрытии (англ. exact cover).

Каноническая форма (КФ) – лексикографически минимальное строковое представление ДЛК в соответствующем классе изоморфизма (изотопизма).

Симметрия – некоторое соответствие между элементами ДЛК. Может быть рассмотрена геометрически (симметрия в горизонтальной или вертикальной плоскости, симметрия относительно центра ДЛК) или обобщенно через структуру длин циклов перестановок (P_X, P_Y, P_V) . Для $N = 10$ существует $10! = 3\,628\,800$ различных перестановок, но только 42 из них имеют различные структуры длин циклов.

Частично-симметричный ДЛК – ДЛК, в котором M ячеек подчиняются симметрии, а остальные ячейки заполнены несимметрично, не нарушая при этом определения корректного ДЛК.

Комбинаторная структура – граф, вершины которого образованы ДЛК, а ребра представляют собой наличие отношения ортогональности между соответствующей парой ДЛК. Множество комбинаторных структур, найденных в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, приведено ниже.

ESODLS (Extended SODLS) – ДЛК, имеющий ОДЛК из того же главного класса. Получение подобных пар ОДЛК может быть эффективно организовано без построения трансверсалей с использованием CMS.

CMS (Cells Mapping Schema) – схема отображения ячеек ДЛК. Может быть использована для поиска ОДЛК без трансверсалей.

1. ДЛК без ОДЛК (пустышка, англ. bachelor)

а) \boxed{A} б) $\boxed{1}$

Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204539867356187409294783216052730985146685924731046970
13258704619852383156029745982760431 (ДЛК A , КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = (0).$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912045398673561874092947832160527309851466859247310469701
3258704619852383156029745982760431 (ДЛК A).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 1, a = 0, \rho = [1].$$

Способ нахождения:

любой из видов перебора, т.к. абсолютное большинство ДЛК не имеют ОДЛК.

2.1. Пара ОДЛК без симметрии (несимметричная однушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204365978201563489734579816205749802163698124730583760
19254963072854175681904324892573016 (ДЛК А, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567893758692410498710325612097458639412580637209436857168302
71945854601739256719340287365829104 (ДЛК В, КФ 2).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043659782015634897345798162057498021636981247305837601
9254963072854175681904324892573016 (ДЛК А);

КФ 2: 012345678912306798458974061352375924801645681239077602584193984731
5260241593067850867924316391807524 (ДЛК В).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

любой из видов перебора в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX [9]), приблизительно на 30 млн. ДЛК есть 1 ДЛК с ОДЛК.

2.2. Пара ОДЛК с симметрией (симметричная однушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204587936543789162067981302549375628041894071356236512
49807708296541325693041784816072395 (ДЛК *A*, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567899357860421256107489346092175383786542910729438510689457
01362581063927410789236456432198057 (ДЛК *B*, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912045879365437891620679813025493756280418940713562365124
9807708296541325693041784816072395 (ДЛК *A*, ДЛК *B*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 2, a = 1, \rho = [1, 1].$$

Способ нахождения:

полный перебор самоортогональных ОДЛК (англ. SODLS) [1, 2] (симметрия обеспечивается за счет транспонирования ДЛК относительно главной или побочной диагонали); также встречаются аналогичные ОДЛК для других *M*-преобразований [3].

3.1. Линия-3 без симметрии (несимметричная двушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204369857278693510480571923463869571420597104863276482
13095453062791894157802636392804571 (ДЛК В, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567899652017438527834901638195246071905268374603478259143918
75260748693012585671039422740691853 (ДЛК А, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567899652817430527034981638195246071985260374603478259143910
75268740693812585671039422748691053 (ДЛК С, КФ 3).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043698572786935104805719234638695714205971048632764821
3095453062791894157802636392804571 (ДЛК В);

КФ 2: 012345678912047893564376801295508921764325176489307698135402396057
4821873192056498453620176452093178 (ДЛК А);

КФ 3: 012345678912047893564379801265508621794325179486307698135402396057
4821873162059498453620176452093178 (ДЛК С).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 3, a = 2, \rho = [1, 1, 2].$$

Способ нахождения:

любой из видов перебора в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX), приблизительно на 500–1000 «однушек» есть 1 несимметричная «двушка».

Примечание:

структуру линия-3 также можно рассматривать как «структуру 1:2» или как ромб-1.

3.2. Линия-3 с симметрией (симметричная двушка)



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204365978203581469746971820359786543120347809125669417
28503785063941253192708648562907341 (ДЛК *B*, КФ 1) – горизонтальная
симметрия;

ДЛК 2: 01234567893857290416479836152092865031746510724893564281903783049
75261246918730510756329487931048652 (ДЛК *A*, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567893859072416974836102552869431706015729843269081753483742
05961496218035715076342987431598602 (ДЛК *C*, КФ 2).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043659782035814697469718203597865431203478091256694172
8503785063941253192708648562907341 (ДЛК *B*);

КФ 2: 012345678912043689575716903842389752401664598102739378241560856017
9324493278560126450971387081632495 (ДЛК *A*, ДЛК *C*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 3, a = 2, \rho = [1, 1, 2].$$

Способ нахождения:

любой из видов перебора симметричных ДЛК (плоскостная симметрия [4–6], обобщенная симметрия [7]) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

4.1. Линия-4 без симметрий



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204579836546820319726751389406789324051381079526479460
81325935786041280916425734532917608 (ДЛК B, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567897315948620365978401242986015739872163405508637294114072
39856694051723825348901678761025394 (ДЛК A, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567897315984620365974801242986015739472163805508637294118072
39456694051723825348901678761025394 (ДЛК C, КФ 3);

ДЛК 4: 01234567891204539876746820159326153789406589724031387019526459460
83127973186045280976423154352917608 (ДЛК D, КФ 4).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912045798365468203197267513894067893240513810795264794608
1325935786041280916425734532917608 (ДЛК B);

КФ 2: 012345678912306958476057843192541908237628417096357968310524479623
8051937256140835841279608605974213 (ДЛК A);

КФ 3: 012345678912045689373571924806948630715259328106748769042315689517
3420704829156346107352982357689041 (ДЛК C);

КФ 4: 012345678912045389673987201546801594762374926150385876093214653872
4190964187230543501698722769380451 (ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 3, \rho = [1, 1, 2, 2].$$

Способ нахождения:

перебор частично-обобщенно-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

4.2. Линия-4 с симметрией



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891238670945796408351246197028533802519467859734120624508
67391908623517457419286306375194028 (ДЛК А, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567897692148350143679082590853276145764231098397068514283415
79206250891346762198045734857062931 (ДЛК В, КФ 2) – SODLS;

ДЛК 3: 01234567891238690475976408351246197028533802514967859734120629508
67341708623519454719286306345179028 (ДЛК С, КФ 2) – SODLS;

ДЛК 4: 01234567897659148320143672089520853976149764231058397068514283415
79206520891346765128049734897062531 (ДЛК D, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912045389762689705143783612409567509813248495017632497286
3501356827941093176402585041392867 (ДЛК В, ДЛК С);

КФ 2: 012345678912386709457964083512461970285338025194678597341206245086
7391908623517457419286306375194028 (ДЛК А, ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 3, \rho = [1, 1, 2, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор самоортогональных ОДЛК.

5. Линия-5 с симметрией



Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204365978234918056787659043219482637150583027961476985
41032351709284640768132956951728403 (ДЛК C, КФ 3) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 2: 01234567893578092146726590431840812376956934785201875912046393426
18570140687395226105498375897361024 (ДЛК D, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567893587091246186590437240326781958974125603635978042192418
37560740621395826105498375798362014 (ДЛК B, КФ 2);

ДЛК 4: 01234567891204365978234918056787659043219472638150583027961476985
41032351709284640867132956951827403 (ДЛК E, КФ 1);

ДЛК 5: 01234567891204365978234918056787659043219481637250583027961476985
41032351709284640768231956952718403 (ДЛК A, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043659782349180567876590432194726381505830279614769854
1032351709284640867132956951827403 (ДЛК A, ДЛК E);

КФ 2: 012345678912047956383496812057607518439228573694108560273941463890
1275731954082697410285635982637104 (ДЛК B, ДЛК D);

КФ 3: 012345678912043659782349180567876590432194826371505830279614769854
1032351709284640768132956951728403 (ДЛК C).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

6.1. Цикл-4 (1 различная КФ)

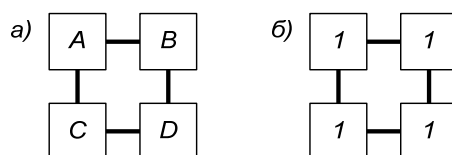


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 0123456789120679834536798425104085237196594836027178640139526452179038951760482323905814678731925604 (ДЛК А, КФ 1);

ДЛК 2: 0123456789538907142615926378049674185230745021396832487690152706948153693182054780153946724867502391 (ДЛК В, КФ 1);

ДЛК 3: 0123456789835907142615926378049674185230748021396532457690182706948153693182054750183946724867502391 (ДЛК С, КФ 1);

ДЛК 4: 0123456789120679834563798425104085267193594863027178640139523452179068951730482626905814378731925604 (ДЛК D, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 0123456789120679834536798425104085237196594836027178640139526452179038951760482323905814678731925604 (ДЛК А, ДЛК В, ДЛК С, ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 4, \rho = [2, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

- перебор частично-симметричных ДЛК («+»-симметрия, число симметричных ячеек $M = 70$ [7]) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX);
- безтрансверсальный поиск ESODLS с использованием CMS [10].

Примечание:

структуру цикл-4 также можно рассматривать как ромб-2.

6.2. Цикл-4 (2 различных КФ)

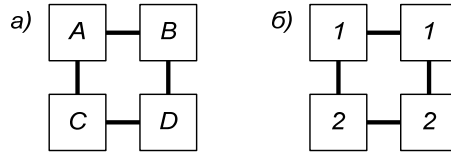


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567893296017845783069512493472086512685930417197854320645627
81093840136957257198243606054172938 (ДЛК А, КФ 1) – SODLS;

ДЛК 2: 01234567895471938620431672905819028745366094382175853016794292870
15364275964081376485032913865291407 (ДЛК В, КФ 1) – SODLS;

ДЛК 3: 01234567895417938620437612905879028145366094382175853076194292810
75364275964081316485032973865297401 (ДЛК С, КФ 2) – SODLS;

ДЛК 4: 01234567898296017345783069512493472086512685930417197854320645627
81093340186957257193248606054172938 (ДЛК D, КФ 2) – SODLS.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912065789346094732518974526180345398071265980613472735812
4690867294035134170892652861395047 (ДЛК А, ДЛК В);

КФ 2: 012345678912046789539516243078368719420567489305124095782631793102
5864846950132758723691402350817496 (ДЛК С, ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 4, \rho = [2, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

полный перебор самоортогональных ОДЛК.

6.3. Цикл-4 (3 различных КФ)

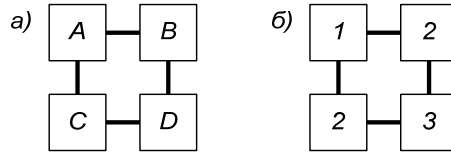


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204635978203518469738479025167986543102647981025385607
29341461209783593582714605791368024 (ДЛК *A*, КФ 1) – горизонтальная симметрия;

ДЛК 2: 01234567898937264501758964013210647253983450189276429837106598765
32410534190862767028139542615097843 (ДЛК *B*, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567898945372601768953014210647253983270189456439826107598576
43210273190856454068179236512094837 (ДЛК *C*, КФ 2);

ДЛК 4: 01234567891204635978203581469738479025167916543802647918025385607
29341468209713593512784605798361024 (ДЛК *D*, КФ 3) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912046359782035184697384790251679865431026479810253856072
9341461209783593582714605791368024 (ДЛК *A*);

КФ 2: 012345678912305879643479160852586197204396048352176952048371809761
3425231679450875483216904785209136 (ДЛК *B*, ДЛК *C*);

КФ 3: 012345678912046359782031548697569827103448607293158352097461791536
4802658790214394761832503749810526 (ДЛК *D*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 4, \rho = [2, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

6.4. Цикл-4 (4 различных КФ)

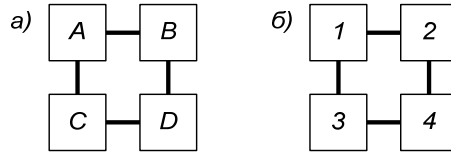


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204379568789524301680567923414687531902693281547097610
84253357916082424189076355340628197 (ДЛК A, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567892476598301825017963439476150289361827450508976214365142
03897473208196578953402161608934572 (ДЛК B, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567892476598301825017963439476150289361827450508976214375142
03896463208197568953402171708934562 (ДЛК C, КФ 3);

ДЛК 4: 01234567891204379568789524301680567923414617538902693218547097680
14253357986012424819076355340621897 (ДЛК D, КФ 4).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043795687895243016805679234146875319026932815470976108
4253357916082424189076355340628197 (ДЛК A);

КФ 2: 012345678912045389672670985134548927061339568270416598713420901536
4872784160239543670912588732149506 (ДЛК B);

КФ 3: 012345678912049786356730825194561739204843715098263942687510906871
4352285604197384951302677589263401 (ДЛК C);

КФ 4: 012345678912043795687895243016805679234146175389026932185470976801
4253357986012424819076355340621897 (ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 4, \rho = [2, 2, 2, 2].$$

Способ нахождения:

перебор частично-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

7. Трешка (структура 1:3)

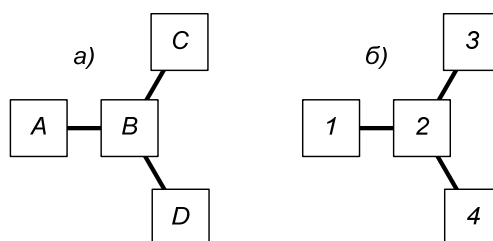


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891237098546409637182596845130725968702431345928061787016
35294237596410875128493606840127953 (ДЛК B, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567896951780432924016857335769028418639514207481762395013648
97025578204139620983756147405239168 (ДЛК A, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567899304872165125893704684970653212075648913453671920879621
84530671920385458403216973681590472 (ДЛК C, КФ 3);

ДЛК 4: 01234567899374802165125893704684970653212705648913453671920879621
84530601927385458403216973681590472 (ДЛК D, КФ 4).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912370985464096371825968451307259687024313459280617870163
5294237596410875128493606840127953 (ДЛК A);

КФ 2: 012345678912045389676085297314451698207334927156087639840152296017
3845984762153087513042965378069421 (ДЛК B);

КФ 3: 012345678912046879359362508174379106425885497213065437890612698013
5427405627389126783195407815942063 (ДЛК C);

КФ 4: 012345678912046879359562308174379106425883497215065437890612698013
5427405627389126785193407815942063 (ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 4, a = 3, \rho = [1, 1, 1, 3].$$

Способ нахождения:

канонизация горизонтально-симметричных ОДЛК, перебор частично-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

8.1. Симметричная четверка (структура 1:4)

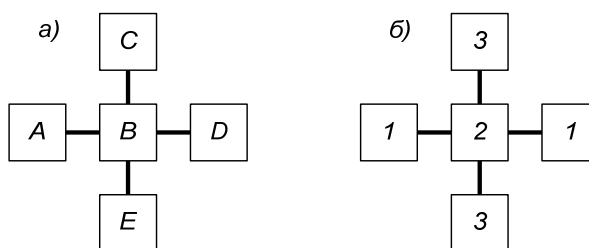


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204365978235109846785967230413749180526406827139574806
39152691254780396758142305837902614 (ДЛК *B*, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 01234567894850279613603718259496125478308265903471170436592839768
14205538972014674916380522548091367 (ДЛК *A*, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567894859270613693718250496125478308265903471179436502830768
14295538072914674016389522548091367 (ДЛК *C*, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567896830279415504718269396125478308256904371170436592849758
13206358972016474916380522368091547 (ДЛК *D*, КФ 2);
- ДЛК 5: 01234567896839270415594718260396125478308256904371179436502840758
13296358072916474016389522368091547 (ДЛК *E*, КФ 3).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912043659782351098467859672304137491805264068271395748063
9152691254780396758142305837902614 (ДЛК *B*);
- КФ 2: 012345678912046798353098164527283679105479513284069315847260478093
5612867950214354620839716547210398 (ДЛК *A*, ДЛК *D*);
- КФ 3: 012345678912045789639031627854476598203138967152407918360425238019
4576657984310284520316975647209318 (ДЛК *C*, ДЛК *E*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 1, 1, 4].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных и обобщенно-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

Примечание:

впервые горизонтально-симметричный строчно-инверсный квадрат, образующий подобную структуру, был описан в работе [4], однако в ней для него приведено лишь 3 ОДЛК; 4-й ОДЛК для него был найден и описан в работе [8].

8.2. Несимметричная четверка (структура 1:4)

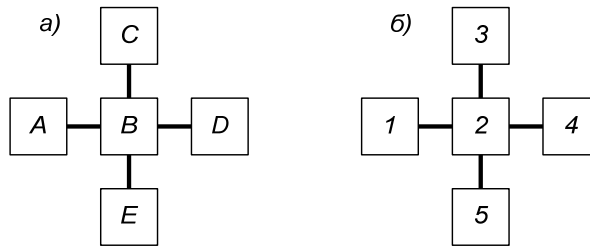


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204379568348509217657392648019561708243784651039260529
83417297084163543186279508697135024 (ДЛК A, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567899546287031603754981243587126903602974158278516390478906
21345826109547314798305265914308267 (ДЛК B, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567899546187032603754982143587216903602974158178526390478906
12345826109547324798305165914308267 (ДЛК C, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567894596287031603754981293587126403602974158278516390478406
21395826109547314798305265914308267 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567894596187032603754982193587216403602974158178526390478406
12395826109547324798305165914308267 (ДЛК E, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912043795683485092176573926480195617082437846510392605298
3417297084163543186279508697135024 (ДЛК A);
- КФ 2: 012345678912045379684687293501981567243060923158478571064293543870
9612374698012523591480767960821354 (ДЛК B);
- КФ 3: 012345678912045389672758690341968721453064351798023946087215489270
3156501984267375603214988371965024 (ДЛК C);
- КФ 4: 012345678912045879634687293501981567243060923158473571064298543870
9612874693012523591480767960821354 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912045389672758690341986721453064351798023946087215469270
3158501984267375803214968371965024 (ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 4, \rho = [1, 1, 1, 1, 4].$$

Способ нахождения:

перебор частично-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

9. Пятерка (структура 1:5)

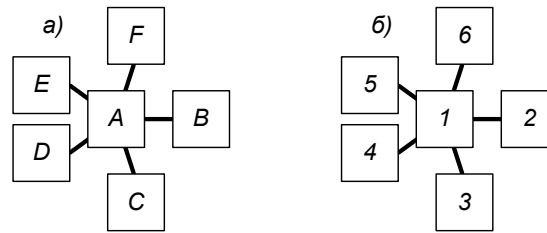


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204879563931768042537950482162586937104794826135086315
04972647032589140597126385862193047 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567898596034271673259184054897120637864105932925738061419456
27308201896345736708491254301278596 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567893596084271678259134054397120687864105932925783061419456
27803201896345786703491254301278596 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567893596084271678259314054197320687864305912925781063419456
27803203896145786701493254301278596 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567893796084251658279134074593120685864103972927583061419476
25803201896743586305491274301278596 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567893796084251658279314074591320685864301972927581063419476
25803203896741586105493274301278596 (ДЛК F, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912048795639317680425379504821625869371047948261350863150
4972647032589140597126385862193047 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912306759489682104357857403219674953816204816593072396184
7205230796851457492108636058729431 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912306759489687104352857403219624953816704816593027396184
7205730296851457492108636058729431 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912045379683970865124248967051390673248515648713290639510
8472853124960778520913464716982035 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912065789344037265891648192735093587104263879042615561480
9273796018354285423910672795634108 (ДЛК E);
- КФ 6: 012345678912045879633062745891964780132553891726406518390274487092
3516795106843284362190572795634108 (ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 5, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 5].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

10.1. Несимметричная шестерка (структура 1:6)

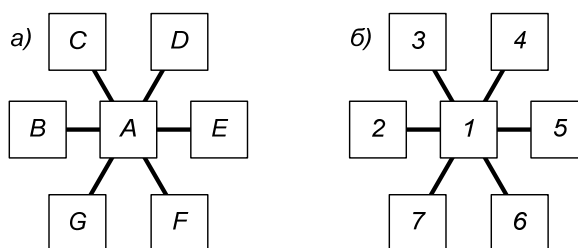


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567896582097413289163504773085621948917340256405987136232769
14508143528967097641038255640728931 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567891206783945534890726146398215077562138094291756043884906
75312907431285638512496706785094123 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567891806723945534290786146392815077568132094291756043884906
75312907431825632518496706785094123 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567891806273945534790286146397815022568137094791256043884906
25317907431825632518496706785094123 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567891206789345594830726146918235077562918034231756049884306
75912907413285638592416706785094123 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567891806729345594230786146912835077568912034231756049884306
75912907413825632598416706785094123 (ДЛК F, КФ 6);
- ДЛК 7: 01234567891806279345594730286146917835022568917034731256049884306
25917907413825632598416706785094123 (ДЛК G, КФ 7).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912340689752695384017648753129079508421364076219853371869
5402956172034883429075615809173624 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912067839455348907261463982150775621380942917560438849067
5312907431285638512496706785094123 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912345098677951862403436872109530796841522490315678684293
7510850627394197851402365617098324 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912345098677941862503536872109430796841522490315678685293
7410850627394197851402364617098325 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912067893455948307261469182350775629180342317560498843067
5912907413285638592416706785094123 (ДЛК E);
- КФ 6: 012345678912347098657052361498479652803139708156428619274503954768
3120240813795663859402175861092374 (ДЛК F);

КФ 7: 012345678912307849564795802613541839706223846195079671048235706213
5498854796132068095231743956270841 (ДЛК G).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 7, a = 6, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 6].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

10.2. Симметричная шестерка (структура 1:6)

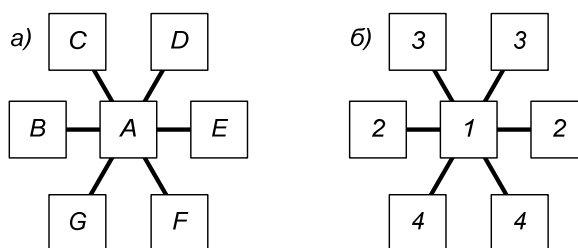


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891234095678234081956798765432108765904321649127805335087
21946501763289476591804324982367105 (ДЛК *A*, КФ 1) – горизонтальная
симметрия, строчная инверсия;
- ДЛК 2: 01234567898465172930609723815427518640931649320875321458960753860
97412490271356898706453217538901246 (ДЛК *B*, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567896512309847829504731623047156981970628435563718492098465
73102478196025330682915747459832061 (ДЛК *C*, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567892510967843386259407110348259674651739208970518263479862
43510647930812552480713968397610452 (ДЛК *D*, КФ 3);
- ДЛК 5: 01234567899607284351548167209360953184274219760538293014587678520
93164134682790587645392103578901642 (ДЛК *E*, КФ 2);
- ДЛК 6: 01234567897901384526857219063423549081675087612943961853740242608
75391184906327567352498103496721058 (ДЛК *F*, КФ 4);
- ДЛК 7: 01234567893745168902563908724123819054676507832194795264183080642
19375427639051898105746231498723056 (ДЛК *G*, КФ 4).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912340956782340819567987654321087659043216491278053350872
1946501763289476591804324982367105 (ДЛК *A*);
- КФ 2: 012345678912045389674371809256694807532186529470137539162408981062
3574548679013227953816403067214895 (ДЛК *B*, ДЛК *E*);
- КФ 3: 012345678912340895764851920367507683149224971036583980675214961274
8035634851792075093628418765294103 (ДЛК *C*, ДЛК *D*);
- КФ 4: 012345678912045389672496805173386517209475123896405948761302963024
7851875192043663870942154079613528 (ДЛК *F*, ДЛК *G*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 7, a = 6, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 6].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

11. Семерка (структура 1:7)

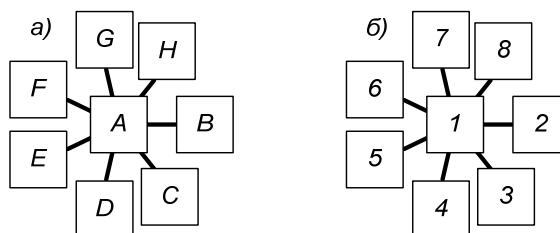


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 0123456789120437956839407158269031847652589762014375680924316475138290261958430783529610744786203915 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 0123456789396754180286590723142418705936457218369090862371457231964058534069827117948205636805319427 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 0123456789396154280780592673147418625930154078329696821340752734901658537609842142978105636805379142 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 0123456789396154280780529673147418695230154078392626891340759734201658537602849142978105636805379142 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 0123456789396154280780529673147418695230154078396262891340759734201658537602849146978105232805379146 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 0123456789396154280780592673147418625930154078329696821340752734091658537690842142078195636895370142 (ДЛК F, КФ 6);
- ДЛК 7: 0123456789396154280786590273147418205936154278369090861342752734961058537069842142978105636805379142 (ДЛК G, КФ 7);
- ДЛК 8: 0123456789396154280786520973147418905236154978362020861349759734261058537062849142978105636805379142 (ДЛК H, КФ 8).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 0123456789120437956839407158269031847652589762014375680924316475138290261958430783529610744786203915 (ДЛК А);
- КФ 2: 0123456789123058964738927650144586271930741832059697046132585967804321265914780363450981728071932465 (ДЛК В);
- КФ 3: 0123456789120459786394603281752839670514398674205187452196304698135207657180439273520819465017963428 (ДЛК С);
- КФ 4: 0123456789123460985735879124062906341578841973526048502976139378564021576208319460451789327691820345 (ДЛК D);
- КФ 5: 0123456789123708964547506913282346578091796482513090827134568591364207680523791436189405725479102863 (ДЛК E);

КФ 6: 012345678912047983653597861042908634752179581246304830579216546120
3978674201589323196804578675932104 (ДЛК F);
КФ 7: 012345678912045879639460325178283967051435867420915748219630469513
8207697180435273520918468017963425 (ДЛК G);
КФ 8: 012345678912065489734738092165591736480286541390279472680531389027
5416738592164065417032982069817354 (ДЛК H).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 7, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 7].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

12.1. Симметричная восьмерка (структура 1:8)

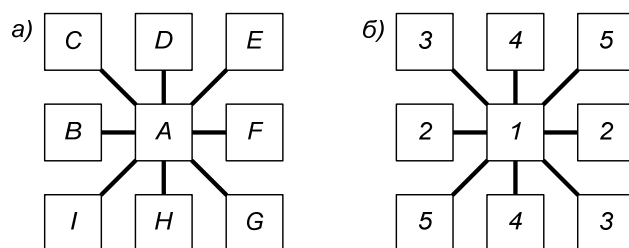


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891230549678496827130568749052137359180462948763215035917
28046874609352150123678942605814937 (ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 01234567897901368542347618925085326974011760534928289504361762589
01374401927586396478120355384720196 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567892901368547347618925085326974011760534928789504361262589
01374401972586396478120355384270196 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567897901368542347681925015326974088760534921289504361762589
01374401927586396471820355384720196 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567892901368547347681925015326974088760534921789504361262589
01374401972586396471820355384270196 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567897541368902947018325689520376411705649328283659401752689
01473631427089546978125303089725164 (ДЛК F, КФ 2);
- ДЛК 7: 01234567892541368907947018325689520376411705649328783659401252689
01473631472089546978125303089275164 (ДЛК G, КФ 3);
- ДЛК 8: 01234567897541368902947081325619520376488705649321283659401752689
01473631427089546971825303089725164 (ДЛК H, КФ 4);
- ДЛК 9: 01234567892541368907947081325619520376488705649321783659401252689
01473631472089546971825303089275164 (ДЛК I, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912305496784968271305687490521373591804629487632150359172
8046874609352150123678942605814937 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912043679588960275341983752061476591824302498631507358290
4176601574982357468130924371098265 (ДЛК В, ДЛК F);
- КФ 3: 012345678912046379588930275641986752031473591824602498361507358290
4176601574982357468130924671098235 (ДЛК С, ДЛК G);

КФ 4: 012345678912340958766487901253760583492195127836404798162035385021
9467896154730223496705185076328194 (ДЛК D , ДЛК H);
КФ 5: 012345678912340958766587901243760583492194127836504798162035384021
9567896154730223596704185076328194 (ДЛК E , ДЛК L).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 9, a = 8, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

12.2. Несимметричная восьмерка (структура 1:8)

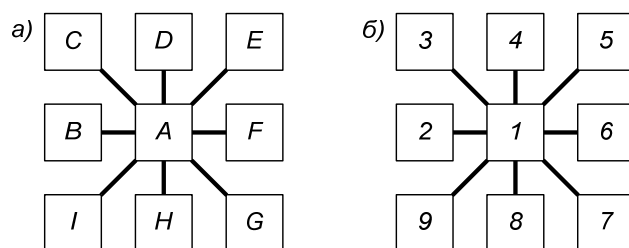


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204573968573219480630189456728946710253485136209775608
29134937560842164892375102697081345 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567892385697041106483957295471803266418572930397021546842913
08657783906421556027418938756923104 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567892385967041106483957295471803266418572930397021546842913
08657783609421556027418938759623104 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567892385697014406183957295471803266418572930397024516812943
08657783906124556027148938756923401 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567892385967014406183957295471803266418572930397024516812943
08657783609124556027148938759623401 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567892385697041186403957295471803266410572938397821546042913
08657703986421556027418938756923104 (ДЛК F, КФ 6);
- ДЛК 7: 01234567892385967041186403957295471803266410572938397821546042913
08657703689421556027418938759623104 (ДЛК G, КФ 7);
- ДЛК 8: 01234567892385697014486103957295471803266410572938397824516012943
08657703986124556027148938756923401 (ДЛК H, КФ 8);
- ДЛК 9: 01234567892385967014486103957295471803266410572938397824516012943
08657703689124556027148938759623401 (ДЛК I, КФ 9).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912045739685732194806301894567289467102534851362097756082
9134937560842164892375102697081345 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912046359787839540612439172806525689031476947182503561209
7834875036942194862713503075814296 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912046359787839540612459172806323869015476947182305561209
7834875036942194682731503075814296 (ДЛК С);

КФ 4: 012345678912046359783952867401431927086580457231967460189352567890
1234983754261025963180476781094523 (ДЛК *D*);
КФ 5: 012345678912046359783952867401431927086580657231947640189352547890
1236983754261025963180476781094523 (ДЛК *E*);
КФ 6: 012345678912046359782839540617439127806575689031426947182503561209
7834875036942194867213503075814296 (ДЛК *F*);
КФ 7: 012345678912046359782839540617459127806373869015426947182305561209
7834875036942194687231503075814296 (ДЛК *G*);
КФ 8: 012345678912043689579862175340834709156264195208737058634291267084
9135398571240657962830144531907628 (ДЛК *H*);
КФ 9: 012345678912046359782346908517695872130454971820633519270846786034
9152873509462196825174304071863295 (ДЛК *I*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 9, a = 8, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично
заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на
наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

13. Симметричная десятка (структура 1:10)

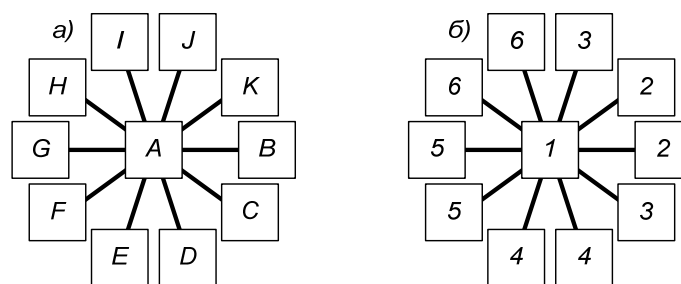


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204879563754291830627810356948639507421945826103750976
43812631578294038601942754976320158 (ДЛК А, КФ 1) – обобщенная симметрия (4,31,31);
- ДЛК 2: 01234567893851694207549087263190162485734985713062163752049867023
81954854910732623789651407264039815 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567894851693207539087264190162485733985714062164752039867023
81954853910742624789651307264039815 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567893851694207549017263890162485734985713062863752049167023
81954154980732623789651407264039815 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567894851693207539017264890162485733985714062864752039167023
81954153980742624789651307264039815 (ДЛК E, КФ 4);
- ДЛК 6: 01234567893851694207549708263190162485734905713862163052749867823
01954854917032623789651407264839015 (ДЛК F, КФ 5);
- ДЛК 7: 01234567894851693207539708264190162485733905714862164052739867823
01954853917042624789651307264839015 (ДЛК G, КФ 5);
- ДЛК 8: 01234567893851694207549780263190162485734985713062163052749867023
81954854917032623789651407264039815 (ДЛК H, КФ 6);
- ДЛК 9: 01234567894851693207539780264190162485733985714062164052739867023
81954853917042624789651307264039815 (ДЛК I, КФ 6);
- ДЛК 10: 0123456789385169420754971026389016248573498571306286305274916702
381954154987032623789651407264039815 (ДЛК J, КФ 3);
- ДЛК 11: 0123456789485169320753971026489016248573398571406286405273916702
381954153987042624789651307264039815 (ДЛК K, КФ 2).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912048795637542918306278103569486395074219458261037509764
3812631578294038601942754976320158 (ДЛК А);

КФ 2: 012345678912043689576812709345349817250626509174385379840162473628
5091894752361090856312747561094823 (ДЛК В, ДЛК К);

КФ 3: 012345678912043795683649180257405893762163857041922917563804987124
5036573681294074906283158562091473 (ДЛК С, ДЛК Л);

КФ 4: 012345678912045893676357298104796183524045986720319782340615547016
3892864570192338190245762036917458 (ДЛК D, ДЛК E);

КФ 5: 012345678912047689357539840162569827431068159230743967012548904653
7821235068149747821096538471395206 (ДЛК F, ДЛК G);

КФ 6: 012345678912045893673657098124796183524045986720319782340615547016
3892834572190668192045732036917458 (ДЛК H, ДЛК J).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 11, a = 10, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10].$$

Способ нахождения:

перебор обобщенно-симметричных ДЛК с симметрией (4,31,31) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

14. Ромб-3

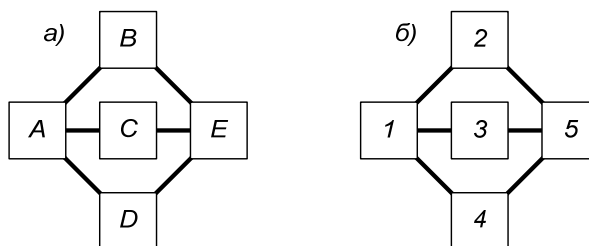


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891237048965605931247889046215377861935204367528409124908
67153458617932097485036125312790846 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567894360295871187296035435418729062937684510509812764396157
48032820951346774560312986784309125 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567894860295371137296085425418739068937624510509813764296157
42038320951846774560812936784309125 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567894860295371137296085425418739068937642510509813764296157
24038340951826772560814936784309125 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567891237048965605931247889045216377861935204357628409124908
67153468517932097486035125312790846 (ДЛК E, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912370489656059312478890462153778619352043675284091249086
7153458617932097485036125312790846 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912046789536987530412483102769527593618045698243071357081
9246741698253093427051688065194327 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912045879362937015648689573041294186230575349872160876129
4503367014982575863012944052968371 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912340698575946817023730829154637596824108012375964489752
3601956074813264751302982681904375 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912367908456748932150481520369730718259649364571208258764
9031540916837276920845138950317426 (ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 6, \rho = [2, 2, 2, 3, 3].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

15.1. Ромб-4 (6 КФ)

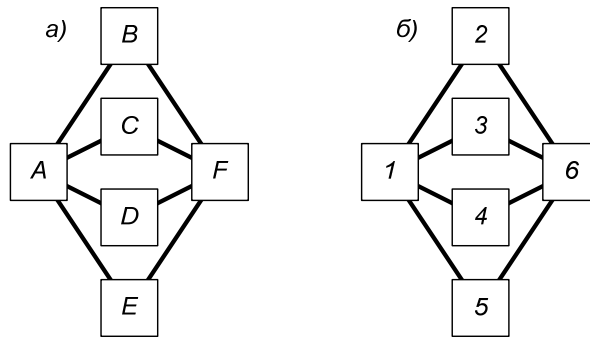


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204368957941827536023579804168960527134584679120360718
43592378910462576950328414532619078 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567893769081245608594213746928753019548103672741063952859072
64813283451796012763980548351720496 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567893796081245608594213749628753019548103672741063952856072
94813283451796012793680548351720496 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567893769081245608594713246928753019548103627241063957859072
64813783451296012763980548351720496 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567893796081245608594713249628753019548103627241063957856072
94813783451296012793680548351720496 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567891204568937941827356023579804168960327154384679120560718
45392578910462376950328414532619078 (ДЛК F, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912043689579418275360235798041689605271345846791203607184
3592378910462576950328414532619078 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912048795366048537192973624580135917842607369018425845296
3017587062194326871903544915302678 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912067983455064873192745198062396475328018735249016439816
7250387201596425896014376910324578 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912345906784762908351834762109590718435625986217430769813
5204280536491735190728466450789123 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912305796483059614872897436250145971083262465780193978624
3015681203795473418952605608921437 (ДЛК E);
- КФ 6: 012345678912045689379418273560235798041689603271543846791205607184
5392578910462376950328414532619078 (ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 8, \rho = [2, 2, 2, 2, 4, 4].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

15.2. Ромб-4 (5 КФ)

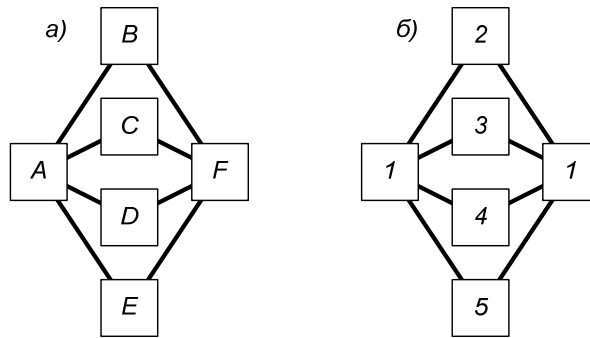


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891234095678341790285659768134029758361240456018932768052
47913864972053170826341952391578064 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567893740819526826409537165192708437305184962983754261020516
38497147690325856987210344982367105 (ДЛК В, КФ 2) – горизонтальная
симметрия;
- ДЛК 3: 01234567893740819526826409537165197208432305184967983254761070516
38492147690325856982710344987362105 (ДЛК С, КФ 3) – горизонтальная
симметрия;
- ДЛК 4: 01234567893750819426826409537164192708537305184962983754261020416
38597157690324856987210344982367105 (ДЛК D, КФ 4) – горизонтальная
симметрия;
- ДЛК 5: 01234567893750819426826409537164197208532305184967983254761070416
38592157690324856982710344987362105 (ДЛК E, КФ 5) – горизонтальная
симметрия;
- ДЛК 6: 01234567891234095678341790285679568132049578361420276018934568025
74913864972053140856371925391248067 (ДЛК F, КФ 1).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912340956783417902856597681340297583612404560189327680524
7913864972053170826341952391578064 (ДЛК А, ДЛК F);
- КФ 2: 012345678912047896359570342168291563487056928073417038265914834709
1256375691840248615230976489170523 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912043659783785094126537981026496417285302860549317795863
1402403218769584962730516517902843 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912047896359570348162891563427056928073417038265914234709
1856375691240848615230976489170523 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912046359783785094126567981023493417285602860549317795836
1402403218769584962730516517902843 (ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 8, \rho = [2, 2, 2, 2, 4, 4].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

15.3. Ромб-4 (4 КФ)

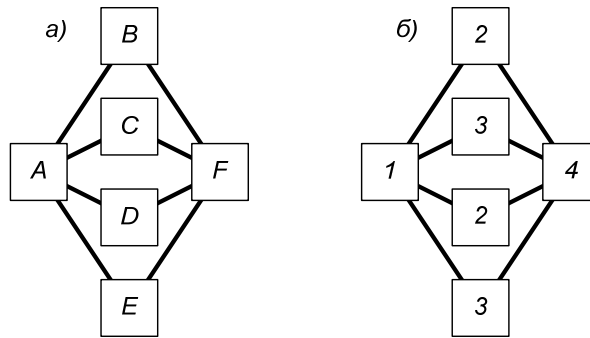


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204635978371054982625398106475896723014408736219576419
08532935827146084620973516975184203 (ДЛК А, КФ 1) – горизонтальная симметрия;
- ДЛК 2: 01234567899845367120857963041279561238044381902567126074935867982
15043301758429626048719355432098671 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567899845367120857963041270561238944381902567126074935867082
15943391758420626948710355432098671 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567899782364510785963024159167834022347908165146052937865948
71023307514289646082159378231097654 (ДЛК D, КФ 2);
- ДЛК 5: 01234567899782364510785963024150167834922347908165146052937865048
71923397514280646982150378231097654 (ДЛК E, КФ 3);
- ДЛК 6: 01234567891294635078371054982625398106475806723914498736210576410
98532935827146084629073516075184293 (ДЛК F, КФ 4) – горизонтальная симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912046359783710549826253981064758967230144087362195764190
8532935827146084620973516975184203 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912045739685480739126854926037170683415929736812450389562
7014497218560363510982472617904835 (ДЛК В, ДЛК D);
- КФ 3: 012345678912043659782315904867346978015278915420365680179324974263
8510493782160585760932416058217493 (ДЛК С, ДЛК E);
- КФ 4: 012345678912046359782931548607469827103594867231506579810243375018
9426804236759173150948625867902314 (ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 8, \rho = [2, 2, 2, 2, 4, 4].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

16.1. Симметричная рыба

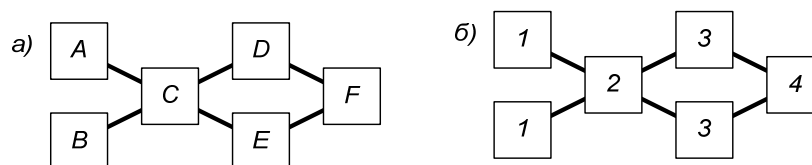


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204367958879652403169451823704510739826205781369493716
08542386927041554380912677682945103 (ДЛК A, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567894731908625241963085778943650128056273491697518420352608
19374134209756896875421303508721946 (ДЛК C, КФ 2) – горизонтальная
симметрия;

ДЛК 3: 01234567891204367958879652403196451823704510739826205781369463719
08542386927041554380912677982645103 (ДЛК D, КФ 3);

ДЛК 4: 01234567891402365978869574302192671845033710629845503681249775419
38260485927031623780916546984507132 (ДЛК B, КФ 1);

ДЛК 5: 01234567891402365978869574302192671845303710629845503681249775419
08263485927031623780916546984537102 (ДЛК E, КФ 3);

ДЛК 6: 01234567894731908625741963085228943650178056273491697518420352608
19374134709256896825471303508721946 (ДЛК F, КФ 4) – горизонтальная
симметрия.

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912043679588796524031694518237045107398262057813694937160
8542386927041554380912677682945103 (ДЛК A, ДЛК B);

КФ 2: 012345678912305496784678901235596127830487593604217596183042280563
4917934781256060147258933482097156 (ДЛК C);

КФ 3: 012345678912043679588796524031964518237045107398262057813694637190
8542386927041554380912677982645103 (ДЛК D, ДЛК E);

КФ 4: 012345678912048796358936714502257910834690856214737658043291489736
5120571093286434625970186341280957 (ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 6, \rho = [1, 1, 2, 2, 2, 4].$$

Способ нахождения:

перебор горизонтально-симметричных ДЛК в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

16.2. Несимметричная рыба

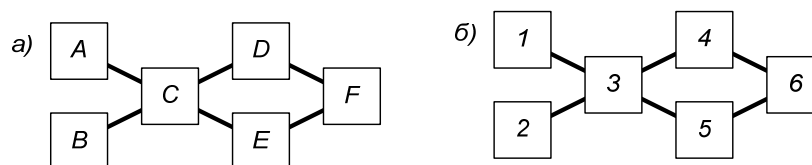


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204367958491257803656791438023758614290739128064520378
95164958603142784659023716840729513 (ДЛК A, КФ 1);

ДЛК 2: 01234567899457028613526190437840183925678376541902254087913667952
13840380916725416327804957984635021 (ДЛК C, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567891205367948491257803656791438023748615290739128065420378
94165948603152785649023716850729413 (ДЛК D, КФ 3);

ДЛК 4: 01234567891205367948498257103656791438023741685290739821065420378
94165941603852785649023716850729413 (ДЛК E, КФ 4);

ДЛК 5: 01234567891204367958498257103656791438023751684290739821064520378
95164951603842784659023716840729513 (ДЛК B, КФ 5);

ДЛК 6: 01234567899457028613526910437840183925678376549102254087193667952
13840380196725416327804957984635021 (ДЛК F, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912045839676389047512897561234046971302582736895401986037
4125501872963434529018767541268093 (ДЛК A);

КФ 2: 012345678912043798565891740623247610839596358174024087235961395068
1247674209351883695241707518962034 (ДЛК B);

КФ 3: 012345678912043679584912578036567914380237586142907391280645203789
5164958603142784659023716840729513 (ДЛК C);

КФ 4: 012345678912046379583781960245205978316495721084365936841027469731
5802731852469084650923716840279513 (ДЛК D);

КФ 5: 012345678912043679584982571036567914380237516842907398210645203789
5164951603842784659023716840729513 (ДЛК E);

КФ 6: 012345678912045839676389047512897561234026971304584736895201986037
4125501872963434529018767541268093 (ДЛК F).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 6, \rho = [1, 1, 2, 2, 2, 4].$$

Способ нахождения:

перебор частично-симметричных ДЛК с симметрией $(4,31,31)$, число симметрично заполняемых ячеек $M = 70$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

17. Крест

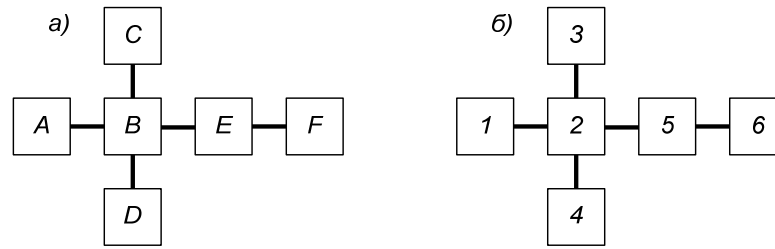


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204678953754201369837682915044079385261938576041268105
29347593684712084519320762697104835 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567894638597012527916083410958724636842903175871634529029847
31506946021835735076849217351029648 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567898204671953754208369137612985044079315268938576041268105
29347593614782014589320762697804135 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567898207641953754208369137612985044079315268938576041268105
29347593617482014589320762694807135 (ДЛК Е, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567891207648953754201369837682915044079385261938576041268105
29347593687412084519320762694107835 (ДЛК D, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567894618597032527936081410958724636842901375873614529029847
13506946023815735076849217351029648 (ДЛК F, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912046789537542013698376829150440793852619385760412681052
9347593684712084519320762697104835 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912305798647962304158274968053163018459274517238096809576
1342567809241398541236703486917205 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912065798343714985620896503714263978425014582190367964870
3215785026149350316249782479318056 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912047986534659827310654837109290126835475796234801387016
9425296754013884319052767385012964 (ДЛК Е);
- КФ 5: 012345678912045986739658210437341790286525698370148732649501684107
3952798536412040761253985390781246 (ДЛК D);
- КФ 6: 012345678912340895763581672490267954031840987256315907164823741589
3062986230715463502189478746931205 (ДЛК E).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 6, a = 5, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 4].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

18. Летательный аппарат

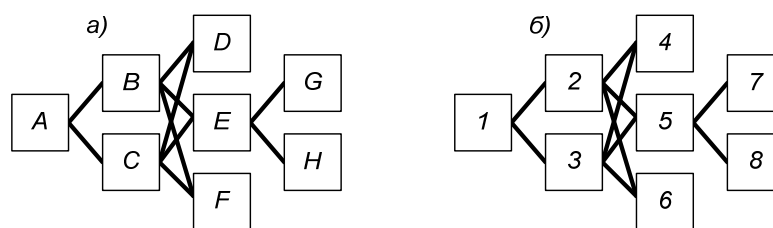


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204638957409128537669475018237359840162583671249085709
63214978532460136120975482468179035 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567894387092615165987340292346185706578904231201536984734921
87056786024519387065319245941720368 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567894837092615165937840292846135706578904231201586934734921
87056736024519887065319245941720863 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567891204638957409128537669175048237359810462583674219085709
63241978532160436420975182468179035 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567891204638957409128537669475218037359842160583671049285709
63214978530462136120975482468179035 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567891204638957409128537669175248037359812460583674019285709
63241978530162436420975182468179035 (ДЛК F, КФ 6);
- ДЛК 7: 01234567894387092615165087349292346185706578904231201536984734021
87956786924510387965310245941720368 (ДЛК G, КФ 7);
- ДЛК 8: 01234567894837092615165037849292846135706578904231201586934734021
87956736924510887965310245941720863 (ДЛК H, КФ 8).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912046389574091285376694750182373598401625836712490857096
3214978532460136120975482468179035 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912045839762657914803974863152080653471924391278065547016
9238793280564135860924176819720354 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912045839762657941803971863452080653174924391278065547016
9238793280561435860921476849720351 (ДЛК С);
- КФ 4: 012345678912046389574091285376691750482373598104625836742190857096
3241978532160436420975182468179035 (ДЛК D);
- КФ 5: 012345678912046389574091285376694752180373598421605836710492857096
3214978530462136120975482468179035 (ДЛК E);

КФ 6: 012345678912046389574091285376691752480373598124605836740192857096
3241978530162436420975182468179035 (ДЛК F);
КФ 7: 012345678912065794383467215890769583402195481276034832690175297034
8516801976235467510839425384901267 (ДЛК G);
КФ 8: 012345678912065794383467215890768593402185491276034832690175297034
8516901876235467510839425394801267 (ДЛК H).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 10, \rho = [1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично
заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на
наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

20. Дерево-1

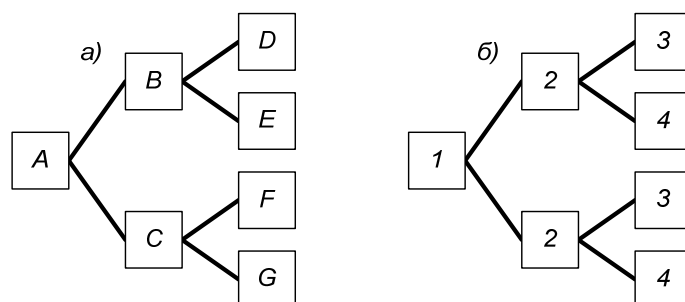


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204679853847591063270612385949836521407379208416565478
93210261034597853897620414958107326 (ДЛК А, КФ 1) – обобщенная симметрия (4,31,31);

ДЛК 2: 01234567896375892041104962537829081476534582703916583726149072613
89504945607813236905148278714930265 (ДЛК В, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567896475892031103962547829081476533582704916584726139072613
89504935607814246905138278714930265 (ДЛК С, КФ 2);

ДЛК 4: 01234567891204679853847591263070612385949836521407379208416565478
93012261034597853897602414958107326 (ДЛК D, КФ 3);

ДЛК 5: 01234567891234679850847591260370612385949806521437379208416565478
93012261034597853897602414958107326 (ДЛК E, КФ 4);

ДЛК 6: 01234567891204679853547891063270612385949836521407379208416565478
93210261034597883597620414985107326 (ДЛК F, КФ 3);

ДЛК 7: 01234567891208679453587491063270612385949436521807379208416565478
93210261034597883597620414985107326 (ДЛК G, КФ 4).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912046798538475910632706123859498365214073792084165654789
3210261034597853897620414958107326 (ДЛК А);

КФ 2: 012345678912340698577458190632579684321038129754064607281395938152
7064654930217820756389418960714523 (ДЛК В, ДЛК С);

КФ 3: 012345678912045879365648930217645910837293607415288792013645487632
5190391567280425378940617081269453 (ДЛК D, ДЛК F);

КФ 4: 012345678912045879365648930217645910837223607415988792013645487639
5120391567280495378240617081269453 (ДЛК E, ДЛК G).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 7, a = 6, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 3, 3].$$

Способ нахождения:

перебор симметричных ДЛК с симметрией (4,31,31) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

Примечание:

для других порядков ДЛК есть другие типы деревьев.

21. Венера

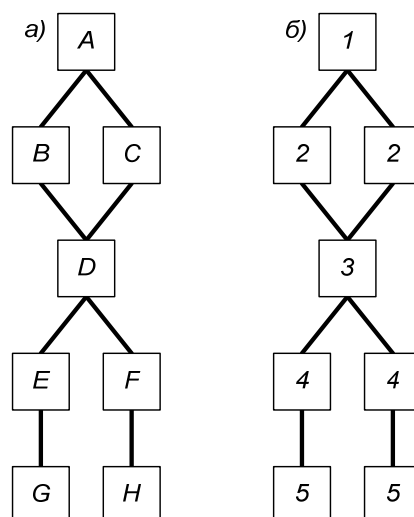


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

ДЛК 1: 01234567891204789635738560149259168372043652918047907854231645902
73168846719052368413259702739064851 (ДЛК A, КФ 1) – обобщенная симметрия (4,31,31);

ДЛК 2: 01234567895896217340304856912716720984358760123594425937160824379
05816730168495295847320616915840273 (ДЛК B, КФ 2);

ДЛК 3: 01234567895896217340394856012716729084358769123504425037169824370
95816730168495295847320616015849273 (ДЛК C, КФ 2);

ДЛК 4: 01234567891204769835736580149259182370643856910247907254831645906
73128648719250386413259702739084651 (ДЛК D, КФ 3) – обобщенная симметрия (4,31,31);

ДЛК 5: 01234567898596217340304856912716720954385760123894428937160524379
08516730168495298547320616915840273 (ДЛК E, КФ 4);

ДЛК 6: 01234567898596217340394856012716729054385769123804428037169524370
98516730168495298547320616015849273 (ДЛК F, КФ 4);

ДЛК 7: 01234567891274069835736580149259182370643856910247970254831645906
73128648719250386413259702039784651 (ДЛК G, КФ 5);

ДЛК 8: 01234567891204769835786530149259182370648356910247907254831645906
73128648719250336418259702739084651 (ДЛК H, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912047896357385601492591683720436529180479078542316459027
3168846719052368413259702739064851 (ДЛК *A*);
КФ 2: 012345678912045986373057819426954632780159187023644670183295649523
1078836107495278329651402789640513 (ДЛК *B*, ДЛК *C*);
КФ 3: 012345678912047698357365801492591823706438569102479072548316459067
3128648719250386413259702739084651 (ДЛК *D*);
КФ 4: 012345678912045986373067819425964532780169187023544570183296549623
1078835107496278329651402789640513 (ДЛК *E*, ДЛК *F*);
КФ 5: 012345678912047698357865301492591823706483569102479072548316459067
3128648719250336418259702739084651 (ДЛК *G*, ДЛК *H*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 8, \rho = [1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4].$$

Способ нахождения:

перебор симметричных ДЛК с симметрией (4,31,31) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

22. Дедал-8

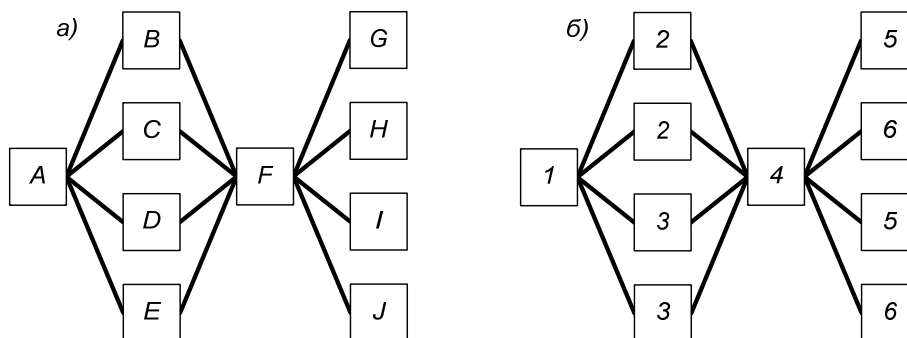


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891506793428386402519759173846024052837916279154086372806
19354637910824596482715308435962071 (ДЛК А, КФ 1) – обобщенная
симметрия (4,31,31);
- ДЛК 2: 01234567895340179862647591823075968031249618542073398402165780372
64591425138790628697304151702695348 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567895340179862647598123075968031249681542073391402865780372
64591425831790628697304151702695348 (ДЛК С, КФ 2);
- ДЛК 4: 01234567895349170862647591823075068931249618542073398402165780372
64591425138790628607394151792605348 (ДЛК D, КФ 3);
- ДЛК 5: 01234567895349170862647598123075068931249681542073391402865780372
64591425831790628607394151792605348 (ДЛК E, КФ 3);
- ДЛК 6: 01234567891206793458386402519729173846054052837916579124086375806
19324637910854296485712308435962071 (ДЛК F, КФ 4) – обобщенная
симметрия (4,31,31);
- ДЛК 7: 01234567895340179862847596123075986031249681542073391402865760372
84591425631790828697304151702895346 (ДЛК G, КФ 5);
- ДЛК 8: 01234567895349170862847596123075086931249681542073391402865760372
84591425631790828607394151792805346 (ДЛК H, КФ 6);
- ДЛК 9: 01234567895340179862647591823075968013249638542071198402365780172
64593425138790628697304153702695148 (ДЛК I, КФ 5);
- ДЛК 10: 0123456789534917086264759182307506891324963854207119840236578017
264593425138790628607394153792605148 (ДЛК J, КФ 6).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

КФ 1: 012345678912397846059567210438531460289727089653147082539146469137
8052847619352068450219733950847261 (ДЛК *A*);

КФ 2: 012345678912045893678592617034965873412024603789515976240813703589
1642431706259868491032753781925406 (ДЛК *B*, ДЛК *C*);

КФ 3: 012345678912043795682368197450947508213665897310423942815607873160
4925465092387150172683947896540213 (ДЛК *D*, ДЛК *E*);

КФ 4: 012345678912067934583864025197291738460540528379165791240863758061
9324637910854296485712308435962071 (ДЛК *F*);

КФ 5: 012345678912045893678952617034569873412024603785919576240813703589
1642431706295868491032753781925406 (ДЛК *G*, ДЛК *I*);

КФ 6: 012345678912043796582451897360568971403293706281458745130926493826
1507356704289160129854737896503214 (ДЛК *H*, ДЛК *J*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 10, a = 12, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 8].$$

Способ нахождения:

перебор симметричных ДЛК с симметрией (4,31,31) в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

22. Дедал-10

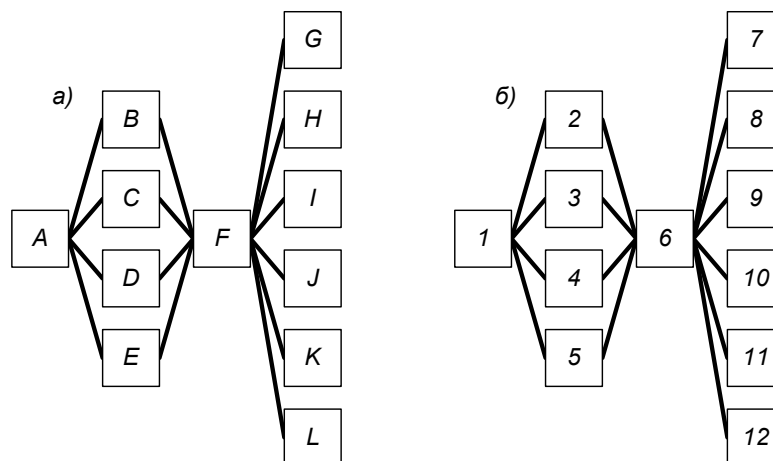


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204537968946238517045186920373986741205275981034678302
69514867590342163910748525047128693 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567898756092341639487105292457138602430185976598726410330716
28495486953021715029476387618309524 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567898756092341639417805292457831602430815976591726480330786
21495486953021715029476387681309524 (ДЛК С, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567898756092341239487105696457138206430185972598726410330716
28495486953021715029476387218309564 (ДЛК D, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567898756092341239417805696457831206430815972591726480330786
21495486953021715029476387281309564 (ДЛК E, КФ 5);
- ДЛК 6: 01234567891204537968976238514075186920343986741205245981037648302
69517867590342163910748525047128693 (ДЛК F, КФ 6);
- ДЛК 7: 01234567898756092341639417805292457031682430815976591726480330786
21495486953021715829476307601389524 (ДЛК G, КФ 7);
- ДЛК 8: 01234567898756092143639417805292457013682410835976593726480110786
23495486951023735829476107601389524 (ДЛК H, КФ 8);
- ДЛК 9: 01234567898756092143639417805292457813602410835976593726480110786
23495486951023735029476187681309524 (ДЛК I, КФ 9);
- ДЛК 10: 0123456789875609234123941780569645703128643081597259172648033078
621495486953021715829476307201389564 (ДЛК J, КФ 10);
- ДЛК 11: 0123456789875609214323941780569645701328641083597259372648011078
623495486951023735829476107201389564 (ДЛК K, КФ 11);
- ДЛК 12: 0123456789875609214323941780569645781320641083597259372648011078
623495486951023735029476187281309564 (ДЛК L, КФ 12).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912045379689462385170451869203739867412052759810346783026
9514867590342163910748525047128693 (ДЛК *A*);
- КФ 2: 012345678912043659783956817402461927083580657231945342189067247890
1356983754261075906382416781094523 (ДЛК *B*);
- КФ 3: 012345678912045739689486725103375916842026973048517538241096896501
7234507183964263409825174812690375 (ДЛК *C*);
- КФ 4: 012345678912043659782358691407786953014264107298534092817365354107
8296873590462196871425305976283014 (ДЛК *D*);
- КФ 5: 012345678912045976384786930152903564281765713894203892761045765081
4293236817590484190235765947208361 (ДЛК *E*);
- КФ 6: 012345678912045379689762385140751869203439867412052459810376483026
9517867590342163910748525047128693 (ДЛК *F*);
- КФ 7: 012345678912046359787839514602609172854325489031674367180295561209
7834875036942194862713503975842016 (ДЛК *G*);
- КФ 8: 012345678912045986377512903468938601527446387219502759180346396027
4815847136950258476320916095847123 (ДЛК *H*);
- КФ 9: 012345678912046359783956817402431927086580457231965462189037267890
1354983754261075903682416781094523 (ДЛК *I*);
- КФ 10: 01234567891204635978283951460760912785437548903162436718029556120
97834875036942194867213503975842016 (ДЛК *J*);
- КФ 11: 01234567891204598637751230946839860152744638721950275918034693602
74815847196350258476320916095847123 (ДЛК *K*);
- КФ 12: 01234567891204368957986217534053479816026419520873705863429126708
49135398501742687962035144531792068 (ДЛК *L*).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 12, a = 14, \rho = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 10].$$

Способ нахождения:

перебор частично-центрально-симметричных ДЛК, число симметрично заполняемых ячеек $M = 60$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

23. Робот

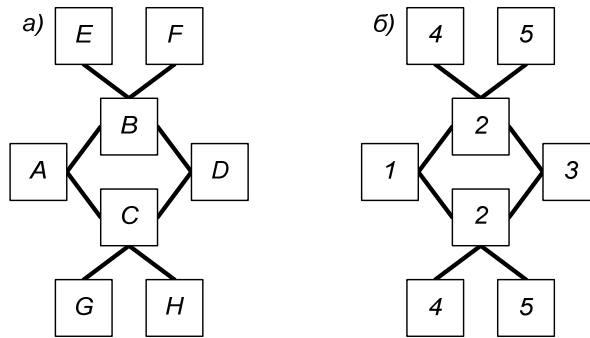


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204785963238160459745391620787460519832967503821450983
47621694287315087162903453857921406 (ДЛК А, КФ 1) – обобщенная
симметрия (4,31,31);
- ДЛК 2: 01234567898310967524489672301572645819301958642307604137589295072
18463378510924626790341585432890671 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567898319067524489672301572645819301058642397694137580295072
18463378519024626709341585432809671 (ДЛК С, КФ 2);
- ДЛК 4: 01234567891204795863238160459745391620787460518932867503921450983
47621694287315097162803453857921406 (ДЛК D, КФ 3) – обобщенная
симметрия (4,31,31);
- ДЛК 5: 01234567891234785960238160459745091623787460519832967503821450983
47621694287015387162930453857921406 (ДЛК E, КФ 4);
- ДЛК 6: 01234567891234795860238160459745091623787460518932867503921450983
47621694287015397162830453857921406 (ДЛК F, КФ 5);
- ДЛК 7: 01234567895204781963238160459745391620787460519832967503821410983
47625694287315087562903413817925406 (ДЛК G, КФ 4);
- ДЛК 8: 01234567895204791863238160459745391620787460518932867503921410983
47625694287315097562803413817925406 (ДЛК H, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912047859632381604597453916207874605198329675038214509834
7621694287315087162903453857921406 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912065789349457832601637194052885947132603610289457296830
4175784906531247856210935032197846 (ДЛК В, ДЛК С);

КФ 3: 012345678912047958632381604597453916207874605189328675039214509834
7621694287315097162803453857921406 (ДЛК D);

КФ 4: 012345678912345789065492631870975680314230817492656340182597891736
5024786592041345092176382678094351 (ДЛК E , ДЛК G);

КФ 5: 012345678912345978605610879324734612509868593041728597240613947163
8205308576294127089134564962081537 (ДЛК F , ДЛК H).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 8, a = 8, \rho = [1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4].$$

Способ нахождения:

перебор симметричных ДЛК с симметрией $(4,31,31)$ в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

24. Скат

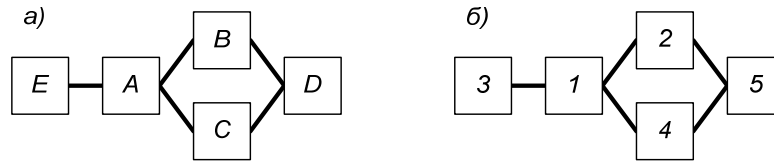


Рис. Комбинаторная структура (а) и соответствующие ей КФ (б)

ДЛК, входящие в состав комбинаторной структуры:

- ДЛК 1: 01234567891204678935583672019437859426102910865347634109752845972
81063765831940294625038718079134256 (ДЛК А, КФ 1);
- ДЛК 2: 01234567895492780163637190425826198730459267541830895013247617056
28394358409762140382659177846319502 (ДЛК В, КФ 2);
- ДЛК 3: 01234567895410789263637129405826098713453067542891895231047617356
28904958413762042980651377846903512 (ДЛК Е, КФ 3);
- ДЛК 4: 01234567895412789063637109425826098713453267540891895031247617356
28904958413762040982651377846903512 (ДЛК С, КФ 4);
- ДЛК 5: 01234567893204678915581672039417859426302930865147634109752845972
83061765831940294625018738079134256 (ДЛК D, КФ 5).

Матрица смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество различных КФ в составе комбинаторной структуры:

- КФ 1: 012345678912046789355836720194378594261029108653476341097528459728
1063765831940294625038718079134256 (ДЛК А);
- КФ 2: 012345678912348690576047592813865973012453901786422905684371958231
7460471602359874682019353871945206 (ДЛК В);
- КФ 3: 012345678912045896373781024596467593120825386709147360895421945231
7860894620317550197683426897142053 (ДЛК Е);
- КФ 4: 012345678912045893676785021493954761283024683709157630894521437196
5208895620317450197386423892147056 (ДЛК С);
- КФ 5: 012345678912046798535980723614679514023898563174207019865342356728
4901463809217584725310962341908567 (ДЛК D).

Число вершин и дуг, отсортированный вектор степеней вершин:

$$v = 5, a = 5, \rho = [1, 2, 2, 2, 3].$$

Способ нахождения:

перебор частично симметричных ДЛК с симметрией (4,31,31), число симметрично заполняемых ячеек $M = 80$, в совокупности с алгоритмом проверки ДЛК на наличие ОДЛК (метод Эйлера-Паркера, DLX).

Библиография

1. White H. Self-orthogonal diagonal Latin squares // <http://budshaw.ca/SODLS.html>.
2. Бельшев А.Д. Перечисление SODLS порядка 10 // <http://forum.boinc.ru/default.aspx?g=posts&m=87090#post87090>, 2017.
3. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Supercomputing Days Russia (SDR'2018). Accepted for publication
4. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. Vol. 139. pp. 43–49.
5. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Титов В.С. Исследование свойств симметричных диагональных латинских квадратов. Работа над ошибками // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2017). Тула, 2017. С. 30–36. http://evatutin.narod.ru/evatutin_co_ls_dls_symm_v2.pdf
6. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1940. Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. Aachen, Germany, 2017. pp. 74–79. <http://ceur-ws.org/Vol-1940/paper10.pdf>
7. Ватутин Э.И. О свойствах обобщенных симметрий // <http://forum.boinc.ru/default.aspx?g=posts&m=89957#post89957>, 2018.
8. Zaikin O., Kochemazov S. The Search for Systems of Diagonal Latin Squares Using the SAT@home Project // International Journal of Open Information Technologies. Vol. 3, No. 11. 2015. pp. 4–9.
9. Knuth D.E. Dancing links // arXiv:cs/0011047, 2000. <https://arxiv.org/abs/cs/0011047>
10. Ватутин Э.И. Поиск ESODLS с использованием CMS // https://vk.com/wall162891802_920, 2019.