Ватутин Э.И.
Юго-Западный государственный университет
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

О числе интеркалятов в диагональных латинских квадратах специального вида

Широко известным типом комбинаторных объектов являются латинские квадраты (ЛК), исследованию свойств которых посвящено большое количество научных работ [1]. ЛК порядка N представляет собой квадратную таблицу размером $N \times N$, элементы которой заполнены значениями некоторого алфавита U мощности $|U| = N$ так, что в строках и столбцах дублирование значений запрещено. Одной из известных разновидностей ЛК общего вида являются диагональные латинские квадраты (ДЛК), в которых по сравнению с ЛК дублирование значений также запрещено на главной и побочной диагоналях. С ЛК и ДЛК связан ряд открытых математических проблем, часть из которых направлена на теоретический анализ устройства спектров S числовых характеристик, представляющих собой множество значений, которые может принимать выбранная характеристика (например, число интеркалятов, трансверсалей, диагональных трансверсалей, ортогональных соквадратов и т.д.) для квадратов выбранного вида.

В ходе вычислительных экспериментов, связанных с построением полных спектров для ДЛК малых порядков $(N \le 9)$ [2] и их эвристических аппроксимаций для больших порядков $(N \ge 10)$ [3] был отмечен ряд особенностей. Большинство спектров не являются интересными и имеют следующую структуру: младшая часть спектра является сплошной (или почти сплошной) и образована идущими подряд значениями, старшая часть спектра сплошной не является и образована множеством отдельных значений. Примером подобного спектра является спектр числа интеркалятов в ДЛК общего вида порядка 8: его младшая сплошная часть образована значениями $\{0, 1, ..., 52\}$, а в старшей присутствуют значения $\{56, 60, 64, 68, 72, 80, 88, 112\}$. В графическом виде данный спектр представлен на рис. 1а.

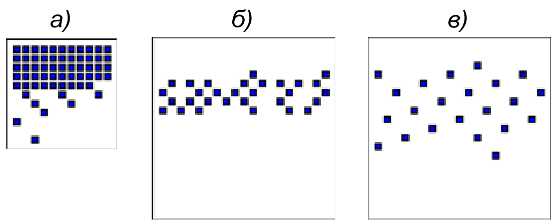

Рис. 1. Примеры графического представления спектра числа интеркалятов в ДЛК порядка 8 (а), эвристической аппроксимации спектра числа интеркалятов в симметричных в одной плоскости ДЛК порядка 14 (б) и эвристической аппроксимации спектра числа интеркалятов в ДЛК Брауна порядка 14 (в)

В то же время, как уже было отмечено в [4], спектры числа трансверсалей в ДЛК четных порядков обладают рядом особенностей и образованы либо четными значениями (для порядков $N = 2k$), либо значениями, кратными 4 (для порядков $N = 4k + 2$). Дальнейший анализ показал, что рядом схожих особенностей обладают и спектры ДЛК специального вида [5], используемые в качестве опорных для построения эвристических аппроксимаций спектров ДЛК общего вида. Особенности данных спектров, найденные эмпирически в ходе серии вычислительных экспериментов, перечислены ниже, в графическом виде примеры подобных спектров приведены на рис. 1б, рис. 1в.

Утверждение 1. Число интеркалятов в ДЛК Брауна порядка $N = 4k + 2$ равно $v = 8x + 1$ (здесь и далее $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$).

Утверждение 2. Число интеркалятов в ДЛК Брауна порядка $N = 8k + 4$ равно $v = 8x + 4$.

Утверждение 3. Число интеркалятов в ДЛК Брауна порядка $N = 8k$ равно $v = 8x$.

Утверждение 4. Число интеркалятов в центрально-симметричных ДЛК порядка N равно $v = 2x$.

Утверждение 5. Число интеркалятов в симметричных в одной плоскости ДЛК порядка $N=4k$ равно $v=2x$.

Утверждение 6. Число интеркалятов в симметричных в одной плоскости ДЛК порядка $N=4k+2$ равно $v=2x+1$.

Утверждение 7. Число интеркалятов в дважды симметричных ДЛК порядка $N=4k$ равно $v=4x$.

При этом спектры числа интеркалятов в ДЛК общего вида, включающие в своем составе все перечисленные выше специальные типы, какими-либо особенностями не обладают. Кратность значений числа интеркалятов в спектре для центрально-симметричных ДЛК (утверждение 4) теоретически можно объяснить тем, что все интеркаляты в ДЛК образуют пары, в которых интеркаляты расположены симметрично относительно центра квадрата, при этом симметричное отражение интеркалята самого в себя теоретически возможно только в случае нахождения образующих его элементов на диагоналях симметрично относительно центра квадрата, что невозможно на практике ввиду получения дублирования значений на диагоналях.

Для известных пандиагональных ЛК можно отметить следующие особенности:

1. Число интеркалятов в известных пандиагональных ЛК порядка $N=13$ кратно 26.
2. Число интеркалятов в известных пандиагональных ЛК порядка $N=17$ кратно 34.
3. Число интеркалятов в известных пандиагональных ЛК порядка $N=19$ кратно 19.
4. Число интеркалятов в известных пандиагональных ЛК порядка $N=25$ равно 0.
5. Для порядков $N \leq 11$ все пандиагональные ЛК являются циклическими и не имеют интеркалятов.

Исходя из доступных на данный момент результатов вычислительных экспериментов можно заметить, что для некоторых порядков $v=kN$ (например, для $N=19$), а для других $v=2kN$ $\left(N \in \{13,17\}\right)$. Порядки $N \in \{1,5,7,11,25\}$ с нулевым числом интеркалятов формально не нарушают ни одну из закономерностей. На основании полученных эмпирических наблюдений можно сформулировать следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Число интеркалятов в пандиагональных ЛК порядка $N=2k_1+1$, $k_1=2k$ (k_1 – четное) $\Rightarrow$ $N=4k+1$ равно $v=2kN$.

Гипотеза 2. Число интеркалятов в пандиагональных ЛК порядка $N=2k_2+1$, $k_2=2k+1$ (k_2 – нечетное) $\Rightarrow$ $N=4k+3$ равно $v=kN$.

В перспективе дальнейших исследований необходимо расширение известных на данный момент списков пандиагональных ЛК и подтверждение или опровержение сформулированных выше гипотез с их использованием. Кроме того, необходимо исследование особенностей и других числовых характеристик в совокупности с отысканием теоретических объяснений найденным эмпирическим закономерностям.

Литература

1. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.

2. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н. и др. О построении спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов малого порядка // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2021). Тула, 2021. С. 7–17.

3. Ватутин Э.И. и др. Оценка мощностей спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов порядков N>9 // Наука и образование в развитии промышленной, социальной и экономической сфер регионов России. Муром, 2022. С. 314–315.

4. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Курочкин И.И., Альбертьян А.М. О числе трансверсалей в диагональных латинских квадратах четных порядков // Национальный суперкомпьютерный форум (НСКФ – 2023). Принята к опубликованию.

5. Ватутин Э.И. Специальные виды диагональных латинских квадратов // Облачные и распределенные вычислительные системы в электронном управлении (ОРВСЭУ – 2022) в рамках Национального суперкомпьютерного форума (НСКФ – 2022). Переславль-Залесский, 2023. С. 9–18.