Ватутин Э.И.[1], Никитина Н.Н.[2], Манзюк М.О.[3], Курочкин И.И.[4], Альбертьян А.М.[5]

[1] Юго-Западный государственный университет, Курск
[2] Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск
[3] Интернет-портал BOINC.ru, Москва
[4] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва
[5] ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва

О ЧИСЛЕ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ В ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТАХ ЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ

Аннотация. В работе приведено описание результатов вычислительных экспериментов, направленных на построение спектров быстровычислимых числовых характеристик в диагональных латинских квадратах общего вида. На основе результатов экспериментов эмпирически сформулированы гипотезы о том, что число трансверсалей в ДЛК четных порядков $N = 2k$ всегда четно, а число трансверсалей в ДЛК порядков $N = 4k + 2$ всегда кратно 4. Справедливость гипотез основательно проверена для порядков $N \le 14$ и частично проверена для порядка $N = 16$. Показано, что спектры числа трансверсалей в ДЛК нечетного порядка, как и спектры ряда других быстровычислимых числовых характеристик в ДЛК какими-либо особенностями не обладают.

Ключевые слова: диагональные латинские квадраты, трансверсали, спектры числовых характеристик, добровольные распределенные вычисления, BOINC.

Латинские квадраты (ЛК) являются широко известными комбинаторными объектами, исследованию фундаментальных свойств и прикладных применений которых посвящен целый ряд публикаций [1, 2]. Существует ряд специальных видов латинских квадратов [3], одним из которых являются диагональные латинские квадраты (ДЛК), для которых в дополнение к требованию отсутствия дублирующихся значений в строках и столбцах добавляется аналогичное требование для главной и побочной диагоналей. Одним из часто используемых совместно с ЛК/ДЛК понятий является понятие трансверсали – множества из N ячеек квадрата, таких, что в каждом столбце и каждой строке квадрата порядка N присутствует в точности по одной ячейке, при этом все стоящие в них значения различны [4–6]. В ДЛК главная и побочная диагонали являются трансверсалями. При работе с ДЛК кроме трансверсалей общего вида в рассмотрение вводятся диагональные трансверсали, для которых в дополнение к приведенному выше определению требуется, чтобы трансверсаль данного типа включала в своем составе по одному элементу с главной и побочной диагонали (которые в некоторых случаях могут совпадать в центральной ячейке ДЛК нечетного порядка) [7]. Наиболее известным практическим применением трансверсалей является их использование в составе метода Эйлера-Паркера [8], в рамках которого отталкиваясь от множества трансверсалей для заданного квадрата производится построение ортогональных ему соквадратов (ортогональных латинских квадратов (ОЛК) для ЛК и ортогональных диагональных латинских квадратов (ОДЛК) для ДЛК соответственно) в случае их существования, что значительно (на несколько порядков) быстрее, например, попытки их построения с использованием метода полного перебора.

Число трансверсалей (диагональных или общего вида) является одним из примеров числовых характеристик ЛК/ДЛК заданного типа (наряду с другими характеристиками, такими как число интеркалятов [9–10], ортогональных соквадратов, циклов различного вида, латинских подпрямоугольников и подквадратов и пр. [11]). Фундаментальный интерес представляют собой ДЛК заданного порядка N с экстремальными значениями выбранной числовой характеристики. Соответствующие им числовые ряды известны и входят в состав Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей (сокр. OEIS) [12] (см., например, числовые ряды A090741, A091323, A287644, A287645, A287647 и A287648). Отдельным важным вопросом является построение спектров числовых характеристик, представляющих собой множества целочисленных значений, которые может принимать выбранная числовая характеристика для квадратов заданного типа [13]. На момент начала исследований и соответствующих им вычислительных экспериментов известными были лишь спектры числа трансверсалей в ЛК порядков 1–8 (см. числовой ряд A309344 в OEIS, Belmonte A.R. et al.). В настоящее время выполняются вычислительные эксперименты для спектров числа трансверсалей (диагональных и общего вида), интеркалятов и ОДЛК в ДЛК различного порядка. Так для порядков 1–7 полные спектры были получены полным перебором в однопоточном режиме с использованием разработанного ПО; для порядка 8 аналогичные вычислительные эксперименты потребовали разбиения пространства поиска на классы эквивалентности (в данном случае – главные классы ДЛК) [14], что потребовало разработки специализированного генератора канонических форм (КФ) ДЛК [15] и позволило снизить вычислительные затраты приблизительно на 3 порядка; ДЛК порядка 9 были обработаны с использованием вычислительных возможностей проектов добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home[1] и RakeSearch[2] на платформе BOINC [16]. Для порядков $N \geq 10$ на современном уровне развития средств вычислительной техники и положений дискретной математики в области ЛК построение полных спектров не представляется возможным, ввиду чего был осуществлен ряд вычислительных экспериментов, в рамках которых производилось построение ряда аппроксимаций спектров с использованием специально разработанных для этого эвристических методов, учитывающих специфику решаемой задачи [17–19]. Часть из указанных вычислительных экспериментов выполнялась в однопоточном режиме, часть – в проекте добровольных распределенных вычислений RakeSearch в зависимости от объема необходимых для этого вычислений. В результате указанных экспериментов построены аппроксимации спектров числа трансверсалей, интеркалятов и ОДЛК в ДЛК порядков $10 \leq N \leq 13$ (в настоящее время в активной фазе находятся эксперименты для ДЛК порядка 14, в перспективе планируются эксперименты для порядков $N \geq 15$).

В некоторых случаях полученные спектры обладают рядом интересных особенностей [18]. В данной работе рассмотрены особенности спектров числа трансверсалей общего вида в ДЛК общего вида, мощность которых описывается числовым рядом A344105 в OEIS. Спектры порядков $N \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ включают в своем составе не более 1 элемента и не очень интересны для анализа и поиска особенностей, для порядков $N = 5$ и $N \geq 7$ мощность соответствующих спектров превышает единицу, а сами спектры представляют интерес для анализа. Первой особенностью обладают спектры числа трансверсалей в ДЛК четных порядков.

Эмпирическое наблюдение № 1. Все известные значения в спектрах числа трансверсалей в ДЛК четных порядков (как минимум для $N \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$) кратны 2.

[1] https://gerasim.boinc.ru
[2] https://rake.boincfast.ru/rakesearch/

Данная особенность представляется вполне логичной для симметричных в одной плоскости ДЛК (горизонтально или вертикально симметричных, но не одновременно) [20] ввиду того, что каждой трансверсали t_1 существует симметричная и не совпадающая с ней трансверсаль t_2, а преобразования симметричного отражения ДЛК от прямой (вертикальной для горизонтально симметричных ДЛК и горионтальной – для вертикально симметричных ДЛК соответственно), автоморфно отражающие ДЛК соответствующего типа сам в себя с точностью до нормализации, преобразуют t_1 в t_2 и обратно. Для ДЛК общего вида получение данного эмпирического результата является неожиданным. Из полученного эмпирического наблюдения следует гипотеза.

Гипотеза № 1. Число трансверсалей в ДЛК четного порядка $N = 2k$ всегда четно.

Еще одной интересной особенностью обладают ДЛК порядков $N = 4k + 2$. Данное подмножество порядков уже выделялось как минимум потому, что для них, по-видимому, не существуют центрально-симметричные ДЛК [21], что доказано полным перебором для порядков $N \in \{2, 6\}$ и проверено эвристически как минимум для порядков $N \leq 25$. Для порядка $N = 6$ в ходе вычислительных экспериментов построен полный спектр[3] мощностью 1, состоящий из единственного значения, равного 32, по нему какую-то особенность выявить сложно. Для порядка $N = 10$ в ходе вычислительных экспериментов была построена эвристическая аппроксимация спектра {144, 176, 184, …, 4736, 4992, 5504}[4], для которой было отмечено, что все значения в составе спектра кратны 4 [18]. В настоящее время в активной фазе находятся эксперименты со спектрами для порядка $N = 14$, на данный момент спектр числа трансверсалей включает в своем составе 274336 значений и с большой долей уверенности будет расширен в перспективе, однако по предварительным данным он образован значениями {25720, 32904, 35376, …, 3375104, 3391488, 3477504}, все из которых так же кратны 4. Отсюда следует еще одно эмпирическое наблюдение.

Эмпирическое наблюдение № 2. Число трансверсалей в ДЛК порядков 6, 10 и 14 всегда кратно 4.

Отталкиваясь от данного эмпирического наблюдения можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза № 2. Число трансверсалей в ДЛК порядков $N = 4k + 2$ всегда кратно 4.

В перспективе дальнейших исследований фундаментальный интерес представляет понимание причины найденных закономерностей. Следует отметить, что ДЛК нечетного порядка какими-либо подобными особенностями не обладают: в них число трансверсалей является произвольным (см. рис.).

---

[3] http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_transversals_n6_1_item.txt

[4] http://evatutin.narod.ru/spectra/spectrum_dls_transversals_n10_442_known_items.txt

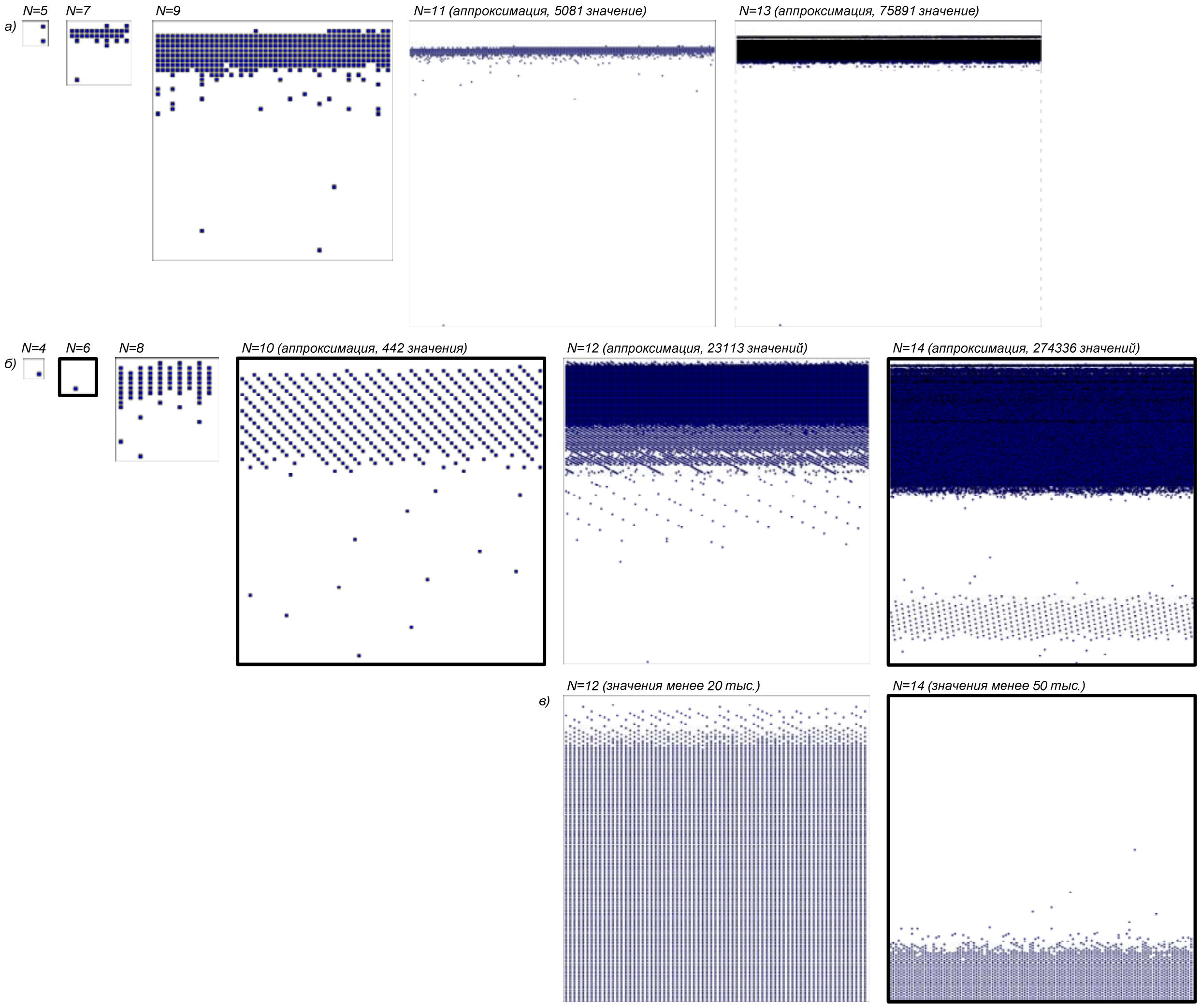

Рис. Графическое изображение спектров числа трансверсалей в ДЛК порядка N нечетных порядков (а), четных порядков (б) и младших частей спектров для порядков 10 и 12 укрупненно (в). Спектры порядков $N = 4k + 2$ выделены жирным.

Старшие части спектров числа трансверсалей в ДЛК четных порядков так же визуально имеют особенности и, по-видимому, образованы каким-то специальным типом ДЛК (симметричными, дважды симметричными, ДЛК Брауна и т.д.). Наличие каких-либо особенностей в спектрах числа диагональных трансверсалей, интеркалятов и ОДЛК в ДЛК на данный момент не выявлено.

Библиографический список

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Ватутин Э.И. Специальные виды диагональных латинских квадратов // Облачные и распределенные вычислительные системы в электронном управлении (ОРВСЭУ – 2022) в рамках Национального суперкомпьютерного форума (НСКФ – 2022). Переславль-Залесский, 2023. С. 9–18.
4. Bedford D. Transversals in the Cayley tables of the non-cyclic groups of order 8 // European Journal of Combinatorics. Vol. 12. 1991. pp. 455–458.
5. McKay B.D., McLeod J.C., Wanless I.M. The number of transversals in a Latin square // Designs, Codes and Cryptography. Vol. 40. 2006. pp. 269–284.

6. Potapov V.N. On the number of transversals in Latin squares // arxiv:1506.01577 [math.CO], 2015.
7. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Кочемазов С.Е., Валяев С.Ю., Титов В.С. Оценка числа трансверсалей для диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. 2018. № 1. С. 12–21.
8. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.
9. Heinrich K., Wallis W. The maximum number of intercalates in a Latin square // Combinatorial Mathemstics VIII. Proceedings of 8th Australian Conference on Combinatorics. 1980. pp. 221–233.
10. Bean R. Critical sets in Latin squares and associated structures // Ph.D. Thesis, The University of Queensland, 2001.
11. Vatutin E., Belyshev A., Nikitina N., Manzuk M. Evaluation of Efficiency of Using Simple Transformations When Searching for Orthogonal Diagonal Latin Squares of Order 10 // Communications in Computer and Information Science. Vol. 1304. Springer, 2020. pp. 127–146. DOI: 10.1007/978-3-030-66895-2_9.
12. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org/
13. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. О построении спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов малого порядка // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2021). Тула, 2021. С. 7–17.
14. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Supercomputing Days Russia 2018. M.: Moscow State University, 2018. pp. 933–942.
15. Ватутин Э.И., Белышев А.Д., Никитина Н.Н., Манзюк М.О. Использование X-образных диагональных заполнений и ESODLS CMS схем для перечисления главных классов диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. 2023. № 1. С. 2–16. DOI: 10.31044/1684-2588-2023-0-1-2-16.
16. Anderson D.P. BOINC: A Platform for Volunteer Computing // Journal of Grid Computing. 2019. pp. 1–24. DOI: 10.1007/s10723-019-09497-9.
17. Ватутин Э.И., Титов В.С., Пыхтин А.И., Крипачев А.В., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. Оценка мощностей спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов порядков N>9 // Наука и образование в развитии промышленной, социальной и экономической сфер регионов России. Муром, 2022. С. 314–315.
18. Ватутин Э.И., Титов В.С., Пыхтин А.И., Крипачев А.В., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. Эвристический метод построения аппроксимаций спектров числовых характеристик диагональных латинских квадратов // Интеллектуальные информационные системы: тенденции, проблемы, перспективы (ИИС – 2022). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2022. С. 35–41.
19. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Курочкин И.И., Альбертьян А.М., Крипачев А.В., Пыхтин А.И. Методы построения спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов // Облачные и распределенные вычислительные системы в электронном управлении (ОРВСЭУ – 2022) в рамках Национального суперкомпьютерного форума (НСКФ – 2022). Переславль-Залесский, 2023. С. 19–23.
20. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S. On Some Features of Symmetric Diagonal Latin Squares // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1940. Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. Aachen, Germany, 2017. pp. 74–79.

21. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Никитина Н.Н., Титов В.С. О свойствах центральной симметрии диагональных латинских квадратов // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. № 1 (8). 2018. С. 74–78.