

УДК 621.397.01

С.Н. Гвоздева, Э.И. Ватулин

svetka-gvozdeva@yandex.ru

Юго-Западный государственный университет, Курск

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ДОСРОЧНОГО ПРЕРЫВАНИЯ ПРОЦЕССА УМНОЖЕНИЯ БИНАРНЫХ МАТРИЦ ОТ ИХ РАЗМЕРА И ПЛОТНОСТИ

Представлены зависимости вероятности досрочного прекращения умножения бинарных векторов от размера N умножаемых матриц и их плотности d .

Задача умножения бинарных матриц возникает в ряде частной подзадачи в ряде фундаментальных и прикладных задач (классификация бинарных отношений в граф-схемах параллельных алгоритмов [1], транзитивное замыкание бинарных отношений, определение достижимости и контрдостижимости в графах и пр.).

При умножении бинарных матриц по формуле

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1, n} a_{ik} b_{kj}$$

работу соответствующего алгоритма и его практической реализации (программной или аппаратной) можно досрочно прервать в случае, если текущее значение частичной конъюнкции при умножении бинарных векторов равно 1 (дальнейшие действия можно не выполнять ввиду того, что $1 \vee x = 1$). Это позволяет экономить время на умножение матриц за счет сокращения числа итераций внутреннего цикла.

С целью оценки соответствующей экономии будем использовать понятие плотности d умножаемых матриц размера $N \times N$:

$$d = \frac{M}{N^2},$$

где M – число единиц в умножаемых матрицах, $0 \leq d \leq 1$, и вероятности α досрочного прекращения умножения бинарных векторов, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Зависимость вероятности $\alpha = 1 - \beta$ досрочного прекращения умножения бинарных векторов от размера N умножаемых матриц и их плотности d является нетривиальной и может быть установлена эмпирически в ходе вычислительного эксперимента. Для этого формируется случайная бинарная матрица размера $N \times N$, включающая в своем составе $M = \lfloor dN^2 \rfloor$ единиц, для нее производится возведение в квадрат, в ходе выполнения которого подсчитывается необходимое для этого число конъюнкций (логических умножений) K , по которому вычисляется доля выполняемых умножений β и вероятность досрочного прекращения умножения $\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{K}{N^3}$ (N^3 –

число умножений элементов матриц без досрочного прерывания).
 Соответствующие зависимости $\beta(d)$ для различных N представлены ниже.

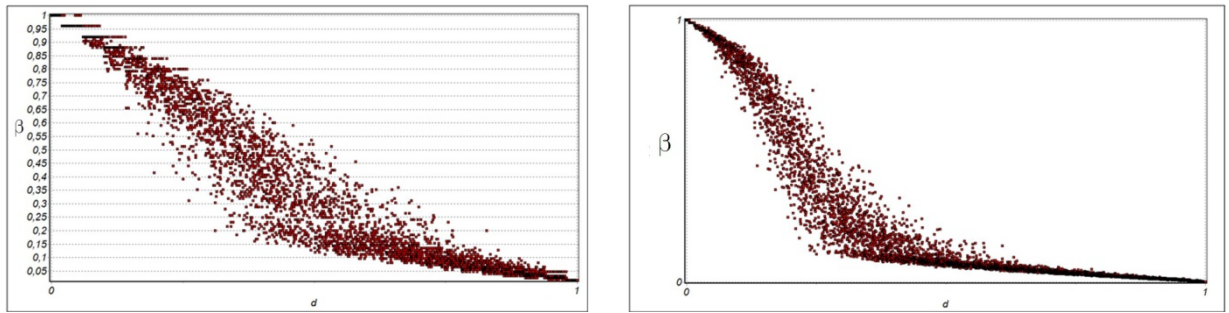


Рисунок 1 – Зависимость $\beta(d)$ для $N = 5$ (левый график) и для $N = 10$ (правый график)

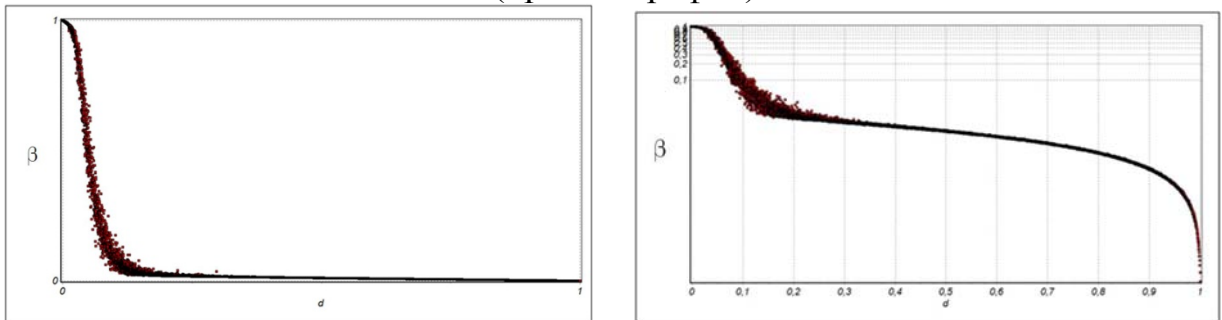


Рисунок 2 – Зависимость $\beta(d)$ для $N = 50$ (левый график – ось ординат имеет линейный масштаб, правый – логарифмический)

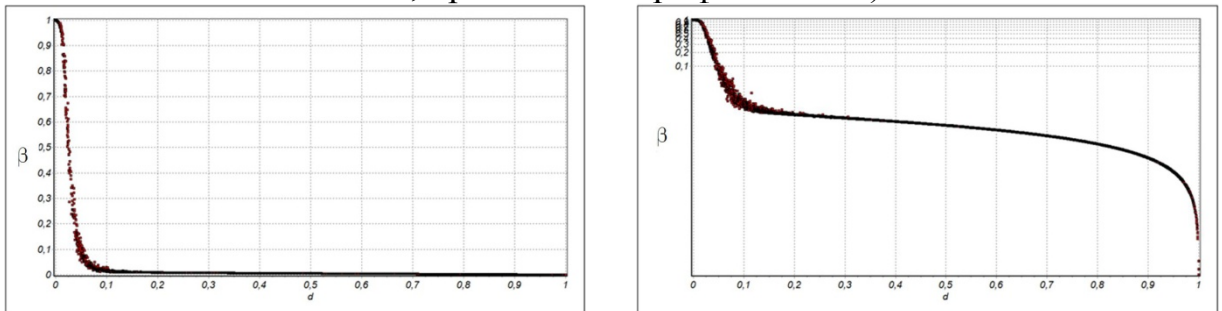


Рисунок 3 – Зависимость $\beta(d)$ для $N = 100$ (левый график – ось ординат имеет линейный масштаб, правый – логарифмический)

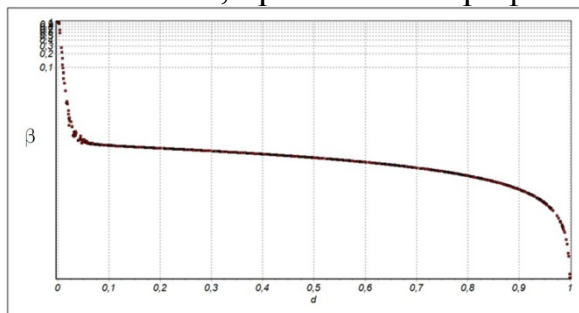


Рисунок 4 – Зависимость $\beta(d)$ для $N = 500$

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что с ростом размера N умножаемых матриц число выполняемых умножений $K \ll N^3$, значение величины $\beta < 0,1$ для $N = 10$, $d > 0,5$; $\beta < 0,01$ для $N = 100$, $d > 0,1$, и раннее прекращение операции умножения битовых векторов существенно (в приведенных случаях – на 2–3 порядка) сокращает

необходимое число умножений элементов матриц при вычислении произведения бинарных матриц, что может быть использовано на практике для сокращения необходимых вычислительных затрат.

Библиографический список

1. Ватутин Э.И. Проектирование логических мультиконтроллеров. Синтез разбиений параллельных граф-схем алгоритмов. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011 г. 292 с.