УДК 519.143

А.О. Новиков, Э.И. Ватутин
E-mail: alexnov4616@gmail.com
Юго-Западный государственный университет

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ НЕЦИКЛИЧЕСКИХ ПАНДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Рассматриваются результаты экспериментальных исследований разработанной программной реализации алгоритмов построения нециклических пандиагональных латинских квадратов.

Известно, что среди пандиагональных латинских квадратов (ПДЛК) существует категория нециклических квадратов. Особенность этих нециклических пандиагональных латинских квадратов заключается в том, что их строки и столбцы не являются циклическими сдвигами первой строки или первого столбца [1, 2].

Для построения таких латинских квадратов используются специализированные алгоритмы, описание которых представлено в работах [3, 4].

В ходе исследования была разработана программная реализация изученных алгоритмов и их практическая апробация. Используя алгоритм [3], удалось обнаружить 72 различных нециклических пандиагональных латинских квадрата порядка p=13 и 108 квадратов порядка p=19.

Для нечетных порядков, не являющихся простыми и не удовлетворяющих условию $p = 6m+1$ также возможно построение нециклических ПДЛК. Однако часть результатов является некорректной, другая часть удовлетворяет условиям пандиагональности и нецикличности.

На рисунках 1 и 2 показаны примеры корректных и некорректных построений.

15	6	2	3	4	5	16	7	8	9	0	11	12	13	14	10	1	17
10	6	7	8	9	20	11	12	13	4	15	16	17	18	14	5	21	22
10	11	12	13	24	15	16	17	8	19	20	21	22	18	9	0	1	2
15	16	17	3	19	20	21	12	23	24	0	1	22	13	4	5	6	7
20	21	7	23	24	0	16	2	3	4	5	1	17	8	9	10	11	12
0	11	2	3	4	20	6	7	8	9	5	21	12	13	14	15	16	17
15	6	7	8	24	10	11	12	13	9	0	16	17	18	19	20	21	22
10	11	12	3	14	15	16	17	13	4	20	21	22	23	24	0	1	2
15	16	7	18	19	20	21	17	8	24	0	1	2	3	4	5	6	22
20	11	22	23	24	0	21	12	3	4	5	6	7	8	9	10	1	17
15	1	2	3	4	0	16	7	8	9	10	11	12	13	14	5	21	17
5	6	7	8	4	20	11	12	13	14	15	16	17	18	9	0	21	22
10	11	12	8	24	15	16	17	18	19	20	21	22	13	4	0	1	2
15	16	12	3	19	20	21	22	23	24	0	1	17	8	4	5	6	7
20	16	7	23	24	0	1	2	3	4	5	21	12	8	9	10	11	22
20	11	2	3	4	5	6	7	8	9	0	16	12	13	14	15	1	17
15	6	7	8	9	10	11	12	13	4	20	16	17	18	19	5	21	22
10	11	12	13	14	15	16	17	8	24	20	21	22	23	9	0	1	2
15	16	17	18	19	20	21	12	3	24	0	1	2	13	4	5	6	22
20	21	22	23	24	0	16	7	3	4	5	6	17	8	9	10	1	12
0	1	2	3	4	20	11	7	8	9	10	21	12	13	14	5	16	17
5	6	7	8	24	15	11	12	13	14	0	16	17	18	9	20	21	22
10	11	12	3	19	15	16	17	18	4	20	21	22	13	24	0	1	2
15	16	7	23	19	20	21	22	8	24	0	1	17	3	4	5	6	2
20	11	2	23	24	0	1	12	3	4	5	21	7	8	9	10	6	22

Рисунок 1 – Некорректный пандиагональный латинский квадрат порядка 25

10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	15	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	3	4	5	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	21	22	23	24	10	1
4	10	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3
6	7	8	9	10	11	12	13	14	20	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	15
8	9	10	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	5	1	2	3	4	15	6	7
15	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	13	14	15	16	17	18	19	0	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	11
14	15	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	10	6	7	8	9	20	11	12	13
16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	20
18	19	20	21	22	23	24	5	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	16	17
20	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	15	11	12	13	14	0	16	17	18	19
22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	21
24	0	1	2	3	4	10	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	5	21	22	23
1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	20	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0
3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	5	1	2
5	6	7	8	9	15	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	10	1	2	3	4
7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6
9	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	10	6	7	8
11	12	13	14	20	16	17	18	19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10
13	14	0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	5	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12
0	16	17	18	19	20	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	15	11	12	13	14
17	18	19	0	21	22	23	24	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16
19	5	21	22	23	24	0	1	2	3	4	10	6	7	8	9	20	11	12	13	14	15	16	17	18
21	22	23	24	0	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	20	16	17	18	19	5
23	24	5	1	2	3	4	15	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	16	17	18	19	20	21	22

Рисунок 2 – Корректный пандиагональный латинский квадрат порядка 25

В результате исследования для порядка 25 было найдено 4 нециклических пандиагональных латинских квадрата, соответствующих критериям пандиагональности.

Далее была предпринята попытка создания пандиагональных латинских квадратов для последующих нечетных порядков, определяемых как p=2k+1. Результаты, отражающие количество корректных и уникальных квадратов в зависимости от порядка, представлены ниже в виде числового ряда.

$\{1, 0, 0, 24, 0, 72, 0, 0, 108, 0, 0,4, 0, 0, 180, 0, 3, 216, 0, 0, 252,0, 0, 264, \ldots\}$.

Была проведена апробация алгоритма получения нециклических пандиагональных латинских квадратов порядка степени простого числа [4].

Поскольку конкретные рекомендации к содержимому массива U, который характеризует функцию обновления ψ^U клеточного автомата на группах, не были определены, был проведен полный перебор последовательностей U в диапазоне u числовых значений элементов, $-9 \le u \le 9$, с размерностями от 2 до 11 чисел [4].

В результате перебора был сформирован определенный перечень латинских квадратов. С помощью подпрограмм проверки на уникальность и алгоритма проверки пандиагональности были получены следующие результаты.

Таким образом, с использованием данного алгоритма [4] было найдено различное количество N уникальных пандиагональных латинских квадратов порядка n, где $n = p^\alpha$.

Результаты построения представлены в таблице 1

Таблица 1 – Результаты построения для разных порядков

p	5	7	5
α	2	2	4
n	25	49	125
N	1250	67228	6250

Помимо всего, была предпринята попытка выполнить получение коллекций квадратов для порядков $n = p^\alpha$, где показатель степени α был равен 1.

На этом этапе происходило формирование только циклических пандиагональных латинских квадратов в соответствии с алгоритмом циклического построения.

Результаты такого построения сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты построения для $\alpha = 1$

p	5	7	11	13	17	19	23	29
N	2	4	8	10	14	16	20	26

На рисунке 3 представлен фрагмент латинского квадрата порядка 49, полученного с использованием данного алгоритма.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22		43	44	45	46	47	48
11	5	6	0	1	2	24	18	12	13	7	8	9	31	25	19	20	14	15	16	38	32	26	…	47	48	42	43	44	17
29	44	3	4	5	20	21	36	2	10	11	12	27	28	43	9	17	18	19	34	35	1	16		37	45	46	47	13	14
40	34	7	1	44	3	25	47	41	14	8	2	10	32	5	48	21	15	9	17	39	12	6	…	27	0	43	37	45	18
37	10	18	26	13	21	8	44	17	25	33	20	28	15	2	24	32	40	27	35	22	9	31		3	11	19	6	14	1
41	0	43	37	38	46	5	48	7	1	44	45	4	12	6	14	8	2	3	11	19	13	21		42	36	30	31	39	47
24	46	19	34	7	22	37	31	4	26	41	14	29	44	38	11	33	48	21	36	2	45	18	…	39	12	27	0	15	30
28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	0	1		22	23	24	25	26	27
39	33	34	28	29	30	3	46	40	41	35	36	37	10	4	47	48	42	43	44	17	11	5		26	27	21	22	23	45
8	23	31	32	33	48	0	15	30	38	39	40	6	7	22	37	45	46	47	13	14	29	44	…	16	24	25	26	41	42
19	13	35	29	23	31	4	26	20	42	36	30	38	11	33	27	0	43	37	45	18	40	34		6	28	22	16	24	46
16	38	46	5	41	0	36	23	45	4	12	48	7	43	30	3	11	19	6	14	1	37	10		31	39	47	34	42	29
20	28	22	16	17	25	33	27	35	29	23	24	32	40	34	42	36	30	31	39	47	41	0	…	21	15	9	10	18	26
3	25	47	13	35	1	16	10	32	5	20	42	8	23	17	39	12	27	0	15	30	24	46		18	40	6	28	43	9
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		1	2	3	4	5	6
18	12	13	7	8	9	31	25	19	20	14	15	16	38	32	26	27	21	22	23	45	39	33	…	5	6	0	1	2	24
36	2	10	11	12	27	28	43	9	17	18	19	34	35	1	16	24	25	26	41	42	8	23		44	3	4	5	20	21
47	41	14	8	2	10	32	5	48	21	15	9	17	39	12	6	28	22	16	24	46	19	13		34	7	1	44	3	25
44	17	25	33	20	28	15	2	24	32	40	27	35	22	9	31	39	47	34	42	29	16	38		10	18	26	13	21	8
48	7	1	44	45	4	12	6	14	8	2	3	11	19	13	21	15	9	10	18	26	20	28		0	43	37	38	46	5
31	4	26	41	14	29	44	38	11	33	48	21	36	2	45	18	40	6	28	43	9	3	25	…	46	19	34	7	22	37
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	0	1	2	3	4	5	6	7	8		29	30	31	32	33	34
46	40	41	35	36	37	10	4	47	48	42	43	44	17	11	5	6	0	1	2	24	18	12		33	34	28	29	30	3
15	30	38	39	40	6	7	22	37	45	46	47	13	14	29	44	3	4	5	20	21	36	2		23	31	32	33	48	0
26	20	42	36	30	38	11	33	27	0	43	37	45	18	40	34	7	1	44	3	25	47	41		13	35	29	23	31	4
23	45	4	12	48	7	43	30	3	11	19	6	14	1	37	10	18	26	13	21	8	44	17		38	46	5	41	0	36
27	35	29	23	24	32	40	34	42	36	30	31	39	47	41	0	43	37	38	46	5	48	7		28	22	16	17	25	33
10	32	5	20	42	8	23	17	39	12	27	0	15	30	24	46	19	34	7	22	37	31	4	…	25	47	13	35	1	16
⋮			⋮			⋮				⋮				⋮				⋮				⋮	⋱	⋮					⋮
32	26	27	21	22	23	45	39	33	34	28	29	30	3	46	40	41	35	36	37	10	4	47	…	19	20	14	15	16	38
1	16	24	25	26	41	42	8	23	31	32	33	48	0	15	30	38	39	40	6	7	22	37		9	17	18	19	34	35
12	6	28	22	16	24	46	19	13	35	29	23	31	4	26	20	42	36	30	38	11	33	27		48	21	15	9	17	39
9	31	39	47	34	42	29	16	38	46	5	41	0	36	23	45	4	12	48	7	43	30	3		24	32	40	27	35	22
13	21	15	9	10	18	26	20	28	22	16	17	25	33	27	35	29	23	24	32	40	34	42		14	8	2	3	11	19
45	18	40	6	28	43	9	3	25	47	13	35	1	16	10	32	5	20	42	8	23	17	39	…	11	33	48	21	36	2

Рисунок 3 – Нециклический пандиагональный латинский квадрат порядка 49

В результате проведения экспериментов по формирования пандиагональных латинских квадратов с применением разработанного программного обеспечения были успешно собраны их коллекции, что говорит о корректности и работоспособности изучаемых алгоритмов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Colbourn, C.J. Handbook of Combinatorial Designs / C.J. Colbourn, J.H. Dinitz. – New York: Chapmaыыыn & Hall/CRC, 2006. – 1016 p. – ISBN 1584885068. – Текст: непосредственный.
2. Keedwell, A.D. Latin Squares and their Applications / A.D. Keedwel, J. Dénes. Amsterdam : Elsevier, 2015. – 438 p. – ISBN 9780444635556. – Текст: непосредственный.
3. Dabbagian, V. Constructing non-cyclic pandiagonal Latin squares of prime orders / V. Dabbaghian, T. Wu // Journal of Discrete Algorithms. – 2015. – № 30. – p. 70-77. – Текст: непосредственный.
4. Dabbagian, V. Constructing Pandiagonal Latin Squares from Linear Cellular Automaton on Elementary Abelian Groups / V. Dabbaghian, T. Wu // Journal of Combinatorial Designs. – 2014. – № 23(5). – p. 216-228. – Текст: непосредственный.